SOMMAIRE

Sommaire 1

Partie A : COURS 3

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré 4
Chapitre II : Fonctions numériques 8
Chapitre III : Dérivation et applications 15
Chapitre IV : Suites numériques 18
Chapitre V : Statistiques 21
Chapitre VI : Probabilités 24
Chapitre VII : Loi binomiale 27
Chapitre VIII : Géométrie plane 32
Chapitre IX : Angles orientés – Trigonométrie 35
Chapitre X : Produit scalaire dans le plan 38
Chapitre XI : Algorithmique 41

Partie B : EXERCICES 43

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré 44
Chapitre II : Fonctions numériques 45
Chapitre III : Dérivation et applications 47
Chapitre IV : Suites numériques 48
Chapitre V : Statistiques 51
Chapitre VI : Probabilités 52
Chapitre VII : Loi binomiale 54
Chapitre VIII : Géométrie plane 58
Chapitre IX : Angles orientés – Trigonométrie 59
Chapitre X : Produit scalaire dans le plan 61

Partie C : CORRIGES 63

Chapitre I : Equations et inéquations du second degré 64
Chapitre II : Fonctions numériques 64
Chapitre III : Dérivation et applications 65
Chapitre IV : Suites numériques 65
Chapitre V : Statistiques 66
Chapitre VI : Probabilités 66
Chapitre VII : Loi binomiale 66
Chapitre VIII : Géométrie plane 68
Chapitre IX : Angles orientés – Trigonométrie 68
Chapitre X : Produit scalaire dans le plan 69

Partie A : COURS

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

I. FONCTIONS POLYNOMES

1° Définitions

Une fonction polynôme est une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Les nombres a_0, a_1, ... , a_n sont des nombres réels appelés les **coefficients** de P.
Un polynôme est nul pour tout x si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le **degré** de P. On le note **deg (P).**
On dit alors que P est de degré n.

2° Egalité de deux fonctions polynômes

P = Q signifie que : 1) **deg P = deg Q**
2) **les coefficients des termes de même degré de P et de Q sont égaux**

3° Racines d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n, $n \geq 1$.

a - Définition

Une **racine** (ou **zéro**) de P est un nombre **a tel que P(a) = 0.**
Déterminer les racines de P revient alors à résoudre l'équation P(x) = 0.

b - Théorème

Si le nombre réel a est une racine de P, on peut factoriser P (polynôme de degré n) par (x-a), c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré (n-1) telle que pour tout réel x, **P(x) = (x-a) Q(x).**

II. TRINOME

1° Définitions

Un **trinôme** est un polynôme du second degré, c'est-à-dire de la forme :

$$\mathbf{P(x) = ax^2 + bx + c} \text{ avec } \mathbf{a \neq 0}.$$

Résoudre **l'équation du second degré P(x) = 0**, c'est chercher l'ensemble S des racines de P.

Un trinôme peut toujours être mis sous **forme canonique** :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cela permet de factoriser le trinôme quand c'est possible.

On note $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ Soit $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$

2° Calcul des racines

Soit a un réel non nul, b et c des réels quelconques.
On appelle **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ **le réel** noté **Δ (lire « delta »),** défini par **: $\Delta = b^2 - 4ac$.**

On trouve les solutions de l'équation (ou racines du trinôme) grâce aux formules suivantes :

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de racine réelle

Si $\Delta = 0$, P admet une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, P admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Les équations bicarrées

Cette méthode permet aussi de résoudre les équations **"bicarrées"**, c'est-à-dire les équations de la forme $Q(x) = 0$ avec $Q(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
On pose $\mathbf{Y} = x^2$ .On a alors $Q(x) = P(\mathbf{Y})$, où P est un polynôme du second degré dont on peut facilement trouver les éventuelles racines.
Si P admet des racines Y_1 et Y_2, il suffit alors de résoudre les équations :

$x^2 = Y_1$ et $x^2 = Y_2$

3° Factorisation

Considérons le trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

Si P a deux racines x_1 et x_2 ($\Delta>0$), alors pour tout réel x, $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
Si P a une seule racine x_0 ($\Delta=0$), alors pour tout réel x, $P(x)=a(x-x_0)^2$.
Si P n'a aucune racine ($\Delta<0$), alors P(x) n'est pas factorisable.

4° Signe

La discussion du signe, comme celle de l'existence des racines, se fait sur le signe du discriminant Δ.

Si $\Delta < 0$, P(x) est du signe de a pour tout x.

Si $\Delta = 0$, P(x) est du signe de a sauf en $x = -\frac{b}{2a}$ où P s'annule.

Si $\Delta > 0$, alors :

P(x) est du signe de a à l'extérieur des racines
P(x) est du signe opposé à celui de a entre les racines

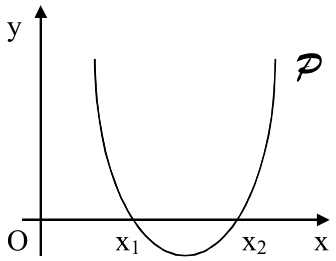
III. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Soit $\mathcal{P}$ la représentation graphique du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminons toutes les situations possibles de la **parabole $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses** selon les signes de Δ et de a.

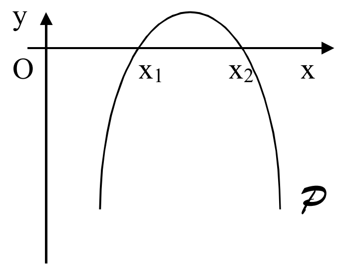
1° $\Delta > 0$

Le trinôme P admet deux racines x_1 et x_2, la parabole $\mathcal{P}$ **coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

<u>a > 0</u>



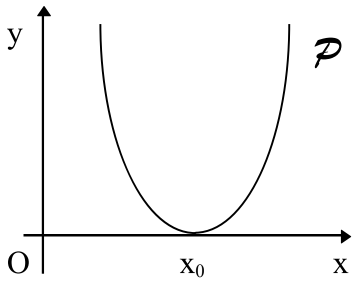
<u>a < 0</u>



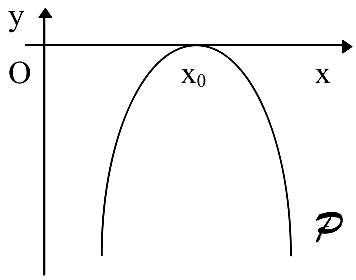
2° $\Delta = 0$

Le trinôme P admet une racine double x_0, la parabole $\mathcal{P}$ **coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

<u>a > 0</u>



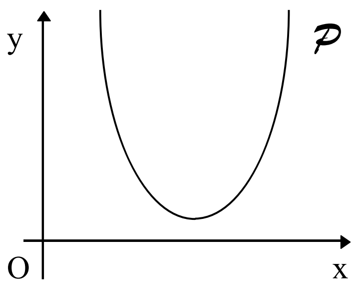
<u>a < 0</u>



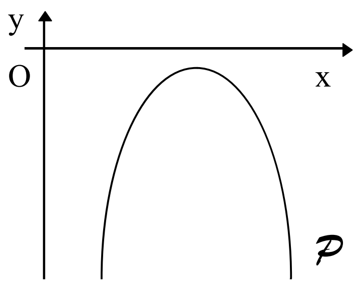
3° $\Delta < 0$

Le trinôme P n'admet aucune racine, la parabole $\mathcal{P}$ **ne coupe pas l'axe des abscisses.**
L'orientation de la parabole $\mathcal{P}$ dépend du signe de a.

<u>a > 0</u>



<u>a < 0</u>



IV. FRACTIONS RATIONNELLES

Une fraction rationnelle est une fraction $\dfrac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$ où P et Q sont deux polynômes.

Une telle fraction est définie pour tous les x tels que $Q(x) \neq 0$.
Les calculs algébriques sur les fractions rationnelles obéissent aux mêmes règles de calcul que les fractions numériques.

Pour une fraction rationnelle, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur et simplifier par un facteur commun éventuel. Mais il ne faut pas oublier que la fraction obtenue n'est pas définie pour les mêmes valeurs que la fraction initiale.

<u>Exemple</u> :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \text{ est définie si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \text{ n'est pas définie si } x = -1 \text{ mais est définie pour } x = 1.$$

Chapitre II : FONCTIONS NUMERIQUES

I. DEFINITION

On appelle **fonction de ℝ dans ℝ** (ou **fonction numérique à variable réelle**) une relation f de ℝ dans ℝ qui à tout nombre réel fait correspondre un nombre réel et un seul, noté f(x).

On note : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

II. ETUDE DE FONCTIONS

1° Domaine de définition

Soit I un intervalle de ℝ. Une fonction de I dans ℝ associe à tout réel x de I un réel unique, noté $f(x)$, **image** de x par f, x est appelé **antécédent** de $f(x)$.

Souvent I n'est pas donné explicitement, et seule l'expression de f(x) est disponible. On cherche alors pour quelles valeurs de x cette expression a un sens (dénominateurs non nuls, quantités sous les racines positives...).
L'ensemble de ces valeurs est appelé **domaine de définition de f**, et est noté $\mathbf{D_f}$.

$$\mathbf{D_f} = \{ \mathbf{x \text{ de }} \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbf{f(x) \text{ existe}} \}$$

La fonction f telle que $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$ est définie si et seulement si $\mathbf{x \geq 0}$

$$\mathbf{D_f = [0;+\infty[} = \mathbb{R}^+$$

La fonction g telle que $\mathbf{g(x) = \dfrac{1}{x - a}}$ est définie si et seulement si $\mathbf{x\text{-}a \neq 0}$,
c'est-à-dire $x \neq a$:

$$\mathbf{D_g} = \mathbb{R}\text{-}\{\mathbf{a}\}$$

2° Représentation graphique

On appelle **représentation graphique de f** dans un repère donné, l'ensemble C des points

$$\mathbf{M\ (x,y)} \text{ tels que : } \begin{cases} \mathbf{x \text{ appartient à } D_f} \\ \mathbf{y \ = \ f(x)} \end{cases}$$

Cette courbe permet d'avoir instantanément sous les yeux le comportement général de f (positive, négative, croissante, décroissante, nombre et valeur approximative des solutions des équations f(x) = m...).

3° Parité – Périodicité

Les courbes représentatives présentent parfois des symétries, qui sont caractérisées par certaines propriétés au niveau des fonctions.

f est **paire** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f, \ -\ x \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(-x) = f(x)} \end{cases}$

f est **impaire** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f, \ -\ x \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(-x) = -\ f(x)} \end{cases}$

f est **périodique de période T** $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{\text{pour tout } x \text{ dans } D_f, \ x+T \text{ est dans } D_f} \\ \mathbf{\text{et } f(x+T) = f(x)} \end{cases}$

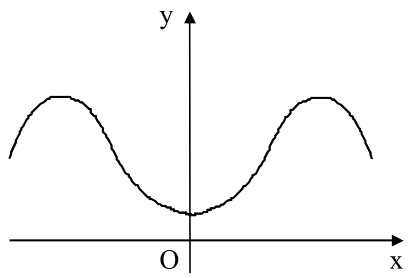
Sur la représentation graphique, la parité correspond à certaines caractéristiques.

Si f est **paire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

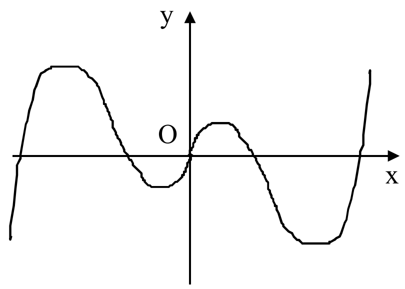
Si f est **impaire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

Si f est **périodique** de période T, sa **courbe est invariante par toute translation** de vecteur de coordonnées (kT, 0) où k est un entier relatif.

Fonction paire

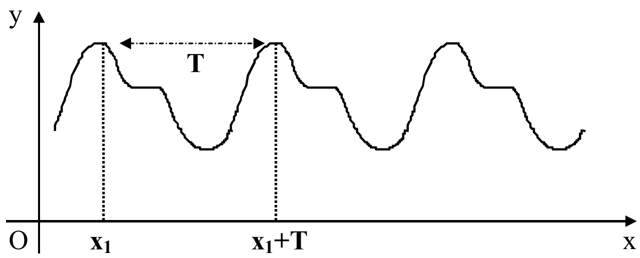


Fonction impaire



De plus, si une fonction est paire ou impaire, on peut ramener l'étude à $\mathbb{R}^+$, le reste se déduisant par symétrie. Et si elle est périodique, on peut se ramener à un intervalle quelconque de largeur T.

Fonction périodique de période T



4° Sens de variation

On dit que f est **croissante** sur un intervalle I si et seulement si deux valeurs quelconques de x sont rangées dans le même ordre que leurs images par f, c'est-à-dire si pour tous x_1, x_2 de I : $\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$.

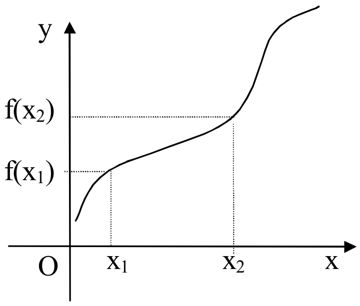
On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si deux valeurs quelconques de x sont rangées dans l'ordre inverse de leurs images par f, c'est-à-dire si pour tous x_1, x_2 de I :
$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$.

On dit que f est **monotone** sur un intervalle I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

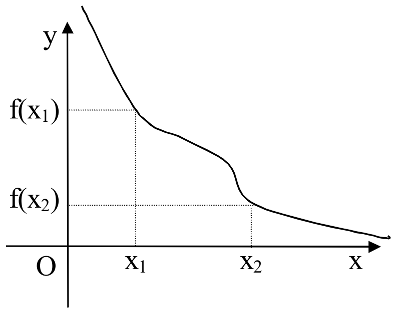
On dit que f est **constante** sur un intervalle I si pour tous x_1, x_2 de I : $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$.

Cela correspond par exemple aux représentations graphiques suivantes :

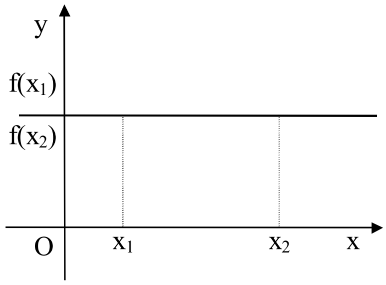
Fonction croissante sur $[x_1;x_2]$



Fonction décroissante sur $[x_1;x_2]$

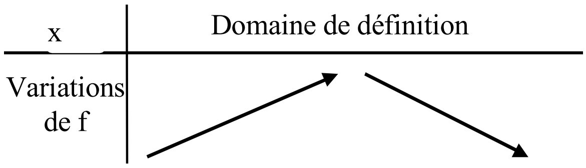


Fonction constante sur $[x_1;x_2]$



Remarque : On dit que f est **strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone** sur I quand les inégalités ci-dessus sont vérifiées au sens strict (< ou >).

Pour résumer ces informations, on dresse le tableau de variations de la fonction f :



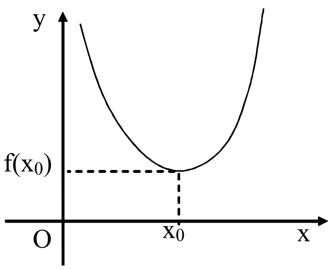
5° Extrema

f admet un **minimum** en x_0 si et seulement si, pour tout élément x de D_f, $f(x) \geq f(x_0)$.
La valeur de ce minimum est alors $f(x_0)$. On dit que f est **minorée** sur D_f.
f admet un **maximum** en x_0 si et seulement si, pour tout élément x de D_f, $f(x) \leq f(x_0)$.
La valeur de ce maximum est alors $f(x_0)$. On dit que f est **majorée** sur D_f.

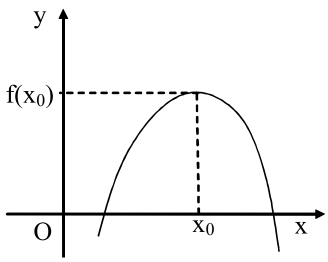
Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
Une fonction **bornée** est une fonction à la fois majorée et minorée.

Exemples :

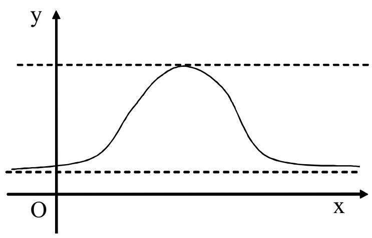
Fonction minorée, $f(x_0)$ est un minimum



Fonction majorée, $f(x_0)$ est un maximum



Fonction bornée



III. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

1° Egalité

Deux fonctions **f et g sont égales** si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{D_f = D_g} \\ \textbf{pour tout x de } \mathbf{D_f}, \ \mathbf{f(x) = g(x)} \end{cases}$$

2° Restriction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et J un intervalle inclus dans I ($J \subset I$).

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On appelle **restriction de f à J** la fonction g définie par: $g : J \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = f(x)$
Dans ce cas, on dit aussi que **f est un prolongement de g**.

3° Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D et k un réel donné.
On peut définir les fonctions f+c, f+g, f-g, f.g, f/g et kf sur D par :

(f+c) (x) = f(x) + c (c une constante réelle) **(f+g) (x) = f(x) + g(x)** **(f-g) (x) = f(x) - g(x)**
(f.g) (x) = f(x).g(x) **(k f) (x) = k f(x)**

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \textbf{avec } g(x) \neq 0$$

Sens de variation

f et g croissantes sur I ⇒ f+g croissante sur I.
f et g décroissantes sur I ⇒ f+g décroissante sur I.

f croissante sur I ⇒ k.f croissante sur I si $k > 0$.
ou k.f décroissante sur I si $k < 0$.
f décroissante sur I ⇒ k.f décroissante sur I si $k > 0$.
ou k.f croissante sur I si $k < 0$.

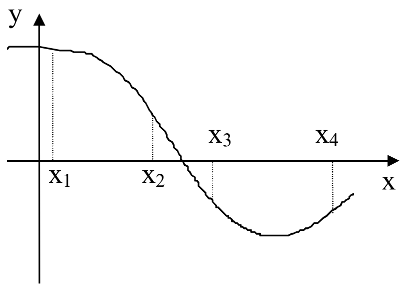
4° Fonctions positives/négatives sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que : f est **positive sur I** si pour tout x de I, $\mathbf{f(x) \geq 0}$. On note $f \geq 0$ sur I.
f est **négative sur I**, si pour tout x de I, $\mathbf{f(x) \leq 0}$. On note $f \leq 0$ sur I.

Remarque : une fonction peut être positive sur un certain intervalle et négative sur un autre.

Exemple : f est positive sur $[x_1;x_2]$ et négative sur $[x_3;x_4]$

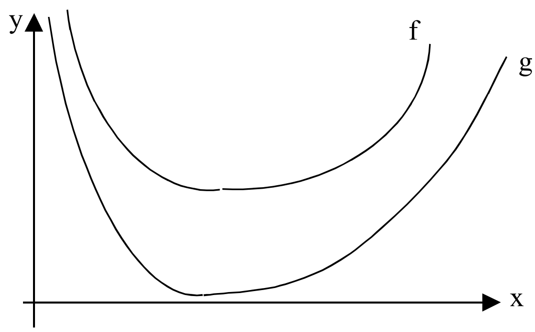


5° Comparaison de fonctions

Soient deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I.

On dit que **f majore g** sur I (ou que **g minore f** sur I) si et seulement si quel que soit x dans I, on a **: $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$.**

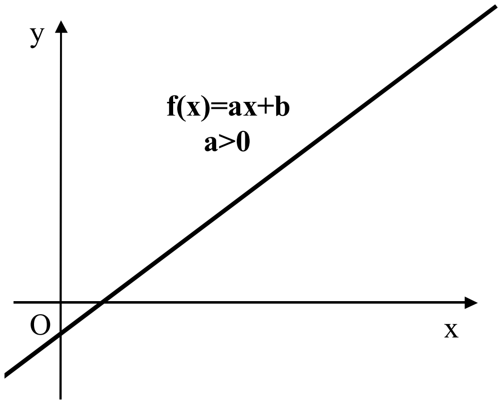
Exemple :

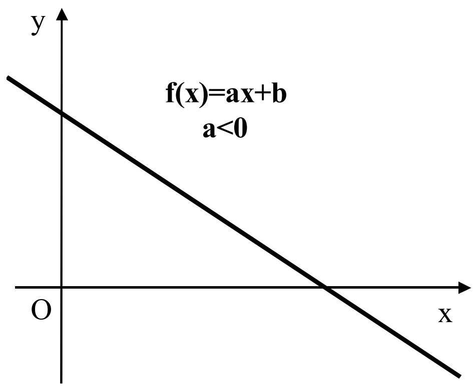


IV. FONCTIONS DE REFERENCE

1° La fonction affine

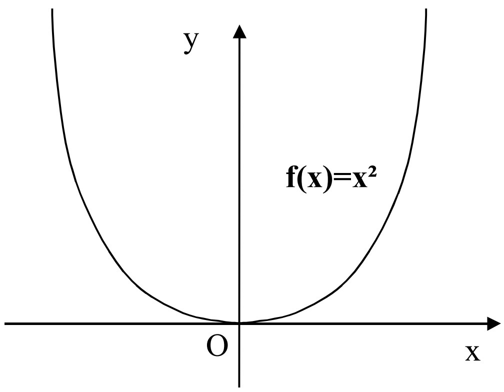
La **fonction affine** d'équation **f(x) = ax + b** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si a > 0 et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si a < 0. Sa représentation graphique est une droite.





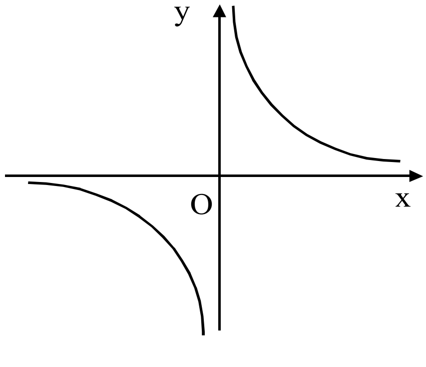
2° La fonction « carrée »

La **fonction carrée** d'équation **f(x) = x²** est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$. Sa représentation graphique est une parabole de sommet O.
Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$ et si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$.



3° La fonction inverse

La **fonction inverse** d'équation **f(x) =** $\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Sa représentation graphique est une hyperbole.
Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} \rangle \frac{1}{b}$ et si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} \rangle \frac{1}{b}$



4° La fonction racine

La **fonction racine** d'équation **f(x)** = $\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Démonstration :

Soit les réels x et y tels que $0 \leq x < y$.

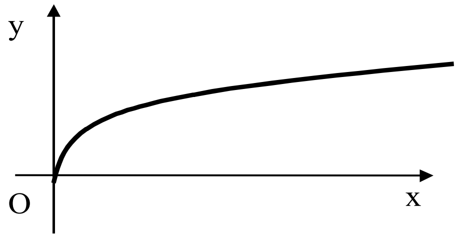
On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$

$$D'où (\sqrt{x}-\sqrt{y}) = \frac{(x-y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

Or $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ car $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{y} > 0$ et $x - y < 0$ (d'après les hypothèses)

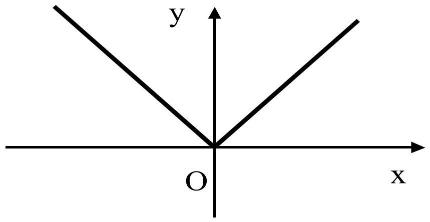
Par conséquent $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$, la fonction racine carrée est croissante.

On en déduit que si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

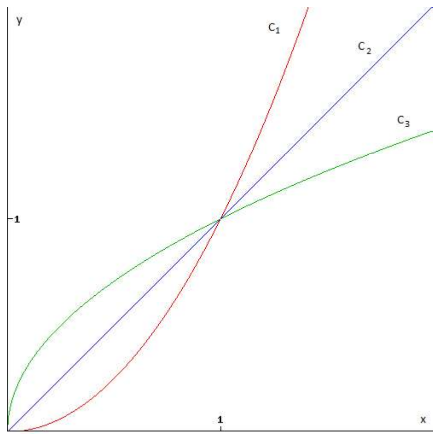


5° La fonction valeur absolue

La **fonction valeur absolue** d'équation **f(x)** = $|x|$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.



6° Position relative des courbes représentatives des fonctions $x \to x$, $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$



❶ $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}\,(1 - \sqrt{x})$ ❷ $x - x^2 = x\,(1 - x)$

C_1 est la courbe représentative de la fonction $x \to x^2$

C_2 est la courbe représentative de la fonction $x \to x$

C_3 est la courbe représentative de la fonction $x \to \sqrt{x}$

D’après l’observation des courbes, on observe deux cas :

- Cas 1 : $0 \leq x \leq 1$

La fonction racine étant croissante sur R$^+$, on a $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{1}$. On a donc $\sqrt{x} \geq 0$ et $1 - \sqrt{x} \geq 0$. (on multiplie par $\sqrt{x}$ de part et d’autre de l’inégalité).
D’où, d’après ❶ : $\sqrt{x} - x \geq 0$.
De même, si $0 \leq x \leq 1$, alors $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$.
D’où, d’après ❷ : $x - x^2 \geq 0$.
Pour tout $x \in [0 ; 1]$, C_1 est en dessous de C_2, qui est elle-même en dessous de C_3.

- Cas 2 : $x > 1$

La fonction racine étant croissante sur R$^+$, on a $\sqrt{x} > \sqrt{1}$ donc $1 - \sqrt{x} < 0$ et $\sqrt{x} > 0$.
D’où, d’après ❶ : $\sqrt{x} - x < 0$.
De même, si $x > 1$, alors $x > 0$ et $1 - x < 0$. (on multiplie par x de part et d’autre de l’inégalité)
D’où, d’après ❷ : $x - x^2 < 0$.
Pour tout $x > 1$, C_3 est en dessous de C_2, qui est elle-même en dessous de C_1.

V. INVERSE ET RACINE D’UNE FONCTION

1° Inverse d’une fonction

La fonction $\frac{1}{u}$ est la fonction qui à chaque réel associe le réel $\frac{1}{u(x)}$ avec u fonction qui ne s’annule pas sur l’intervalle I.
Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ auront des variations opposées sur I.

2° Racine d’une fonction

La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction qui à chaque réel associe le réel $\sqrt{u(x)}$ avec u fonction positive sur l’intervalle I.
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ auront les mêmes variations sur I.

Chapitre III : DERIVATION ET APPLICATIONS

I. DEFINITIONS

1° Dérivabilité - Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.

On dit que **f est dérivable en x_0** si et seulement si le taux de variation $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une **limite finie** lorsque h tend vers 0.

Cette limite est alors appelée **le nombre dérivé de f en x_0, noté f '(x_0)** :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Lorsque les expressions de f sont différentes suivant que $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$, on cherche les **limites de** $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 en restant positif et lorsque h tend vers 0 en restant négatif.

Ces limites, lorsqu'elles existent et sont finies, sont appelées respectivement **nombres dérivés à droite et à gauche** au point x_0.

Si, en un point x_0, le nombre dérivé à droite est différent du nombre dérivé à gauche, la fonction n'est pas dérivable en ce point.

Remarque : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I.
Il est équivalent de dire que f est dérivable en x_0 et qu'il existe une fonction ϕ vérifiant :
$f(x_0+h) = f(x_0) + a\,h + h\,\phi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\phi(h) = 0$.

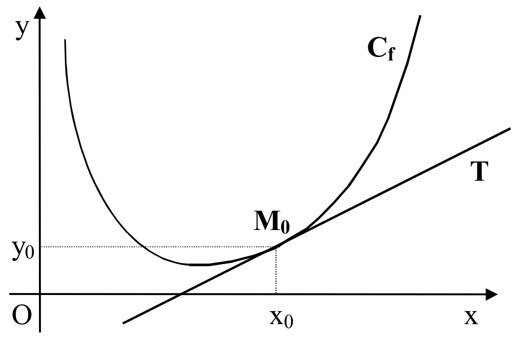
On dit que la fonction affine g telle que $g(h)= f(x_0) + h\,f'(x_0)$ est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de x_0.
Lorsque h est petit, on a $f(x_0+h) \approx g(h)$.

II. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Le **nombre dérivé f '(x_0)** est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point M_0 (x_0;f(x_0)).

L'**équation de la tangente** à la courbe de f en x_0 est alors :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Si la fonction f est dérivable à droite (ou à gauche) au point x_0, de nombre dérivé égal à a, alors la courbe **Cf** admet une **demi-tangente à droite (ou à gauche) au point M_0 de pente a.**

Cas particulier important
Si $f'(x_0) = 0$, **Cf** admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation $y = f(x_0)$.

III. FONCTION DERIVEE

1° Définition

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I, on dit que **f est dérivable sur I.** Soit la **fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x**. Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de f**. On la note **f '**.
Si la fonction f ' est elle-même dérivable sur I alors la dérivée de f ' est notée **f ''**, c'est la **dérivée seconde de f.**

2° Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau ci-dessous donne les dérivées des fonctions les plus courantes :

Fonction	**Dérivable sur I**	**Dérivée**
f(x) = k *k constante*	$I = \left]-\infty;+\infty\right[$	$f'(x) = 0$
f(x) = a x+ b *a et b constants*	$I = \left]-\infty;+\infty\right[$	$f'(x) = a$
f(x) = x^{n} *n entier,* $n \neq 0$	$I = \left]-\infty;+\infty\right[$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$I = \left]0;+\infty\right[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
f(x) = sin (x)	$I = \left]-\infty;+\infty\right[$	$f'(x) = \cos(x)$
f(x) = cos (x)	$I = \left]-\infty;+\infty\right[$	$f'(x) = -\sin(x)$

3° Dérivées et opérations

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur I.

Dérivée de :	**Fonction**	**Dérivée**
Somme de fonctions	$u + v$	$u' + v'$
Produit d'une fonction par une constante	$a \times u$ (a constante réelle)	$a \times u'$
Carré d'une fonction	u^2	$2u'u$
Fonction à la puissance n	u^n	$nu'u^{n-1}$
Produit de fonctions	$u\,v$	$u'v + uv'$
Inverse d'une fonction	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Quotient de fonctions	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Racine d'une fonction	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

IV. PROPRIETES DE LA DERIVEE

La dérivation sert essentiellement à l'étude des fonctions car elle permet de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle I.

1° Sens de variation de f

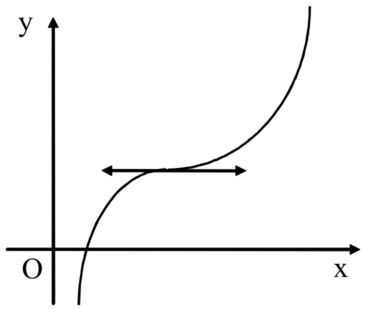
Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I.

f '(x) = 0 pour tout x de I	**⇔**	**f constante sur I**
f '(x) ≥ 0 pour tout x de I	**⇔**	**f croissante sur I**
f '(x) ≤ 0 pour tout x de I	**⇔**	**f décroissante sur I**
f '(x) > 0 pour tout x de I	**⇔**	**f strictement croissante sur I**
f '(x) < 0 pour tout x de I	**⇔**	**f strictement décroissante sur I**

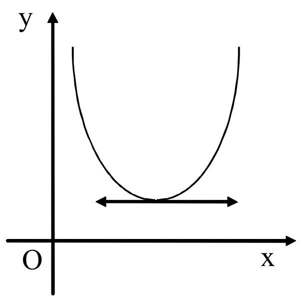
2° Extremum

Si **la dérivée f' de f s'annule et change de signe en x_0** élément de I, alors **f admet un extremum en x_0.**
Dans tous les cas, **si f '(x_0) = 0, la courbe représentative de la fonction admet une tangente horizontale en x_0.**

f'(x) = 0 mais pas d'extremum



f'(x) = 0 et minimum



V. PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

Pour étudier une fonction, il est important de respecter le plan suivant :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.
2. Etudier la parité et/ou la périodicité de la fonction afin de réduire le domaine d'étude.
3. Etudier les limites de f aux bornes (finies et infinies) de D_f.
4. Calculer la dérivée de la fonction et étudier son signe.
5. Récapituler les résultats précédents dans le tableau de variation où figurent :
   - les valeurs de x - le signe de la dérivée
   - les variations de f - les limites de f
6. Tracer la représentation graphique de f. Faire apparaître les tangentes remarquables, les asymptotes et les extremums.

Chapitre IV : SUITES NUMERIQUES

I. DEFINITION

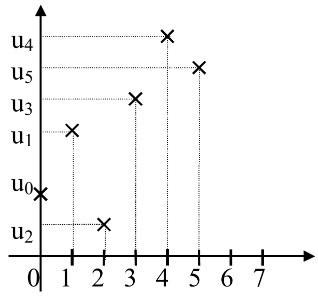
Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Cela signifie que, parmi ces nombres, il y a un premier terme, puis un deuxième, un troisième...

Généralement, on note u_0 le premier terme de la suite, puis u_1 le deuxième, u_2 le troisième...
Le $n^{\text{ième}}$ terme est donc u_{n-1}.

Si le premier terme est u_1, le $n^{\text{ième}}$ terme sera donc u_n.

Une suite est notée conventionnellement **(u_n)**. Fabriquer une suite **(u_n)**, c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté u_n. Ce nombre est appelé **terme d'indice n de la suite (u_n) ou se lit « u indice n »**.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE



Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
On appelle représentation graphique de la suite (u_n) l'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

III. GENERATION D'UNE SUITE

1° Mode explicite

Une suite peut être **définie explicitement en fonction de n** : $u_n = f(n)$, où f est une fonction usuelle définie sur l'ensemble des réels positifs (ou sur un intervalle $[a;+\infty[$, avec a>0).

Exemples :

$u_n = (-1)^{n-1}$ avec $f(x) = (-1)^{x-1}$
$u_n = 2(n+2)$ avec $f(x) = 2(x+2)$

2° Mode itératif ou récurrent

Une suite est dite définie par une relation de récurrence lorsque chaque terme est calculé en fonction du précédent. Il faut alors définir le premier terme u_0 et une formule permettant de calculer un terme en fonction du précédent :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad \text{Exemple : } \begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

IV. VARIATION

Une suite (u_n) est **croissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} \geq u_n}$.
Une suite (u_n) est **strictement croissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} > u_n}$.

Une suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} \leq u_n}$.
Une suite (u_n) est **strictement décroissante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} < u_n}$.

Une suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout entier n, $\mathbf{u_{n+1} = u_n}$.
Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit **croissante,** soit **décroissante,** soit **constante.**

V. PERIODICITE D'UNE SUITE

Une suite (u_n) est **périodique** si et seulement si il existe un **entier** naturel T non nul tel que, pour tout n, on ait : $u_{n+T} = u_n$.

VI. SUITES ARITHMETIQUES

1° Exemple

Considérons la suite des entiers naturels impairs :

1 3 5 7 9 11 ...
+2 +2 +2 +2 +2

On constate que l'on passe d'un terme au suivant **en ajoutant toujours le même nombre 2**.
On dit alors que la suite des entiers naturels impairs est une suite **arithmétique de raison 2.**

2° Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si deux termes consécutifs sont liés par la relation :

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$$

où r est un réel indépendant de n appelé **raison de la suite**.

On en déduit les relations suivantes, quels que soient les entiers n, m et p, lorsque le premier terme est u_0 :

Expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + nr$

Relation entre u_m et u_p : $u_m = u_p + (m-p)r$

3° Somme des n+1 premiers termes

<u>Démonstration</u> : Si la suite arithmétique (u_n) a pour premier terme u_0, la somme des n+1 premiers termes est $S_n = u_0 + u_1 + u_2 \dots u_{n-1} + u_{n-1} + u_n$
Or, par définition, $u_n = u_0 + nr$ donc :
$Sn = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + (n-2)\,r) + (u_0 + (n-1)\,r) + (u_0 + nr)$

On remarque alors que $u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr$
$(u_0 + r) + (u_0 + (n-1)\,r) = 2u_0 + r(1 + n - 1) = 2u_0 + nr$
$(u_0 + 2r) + (u_0 + (n-2)\,r) = 2u_0 + r(2 + n - 2) = 2u_0 + nr$ ….
En regroupant chaque membres deux à deux (le premier avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier…) on obtient $\frac{n+1}{2}$ fois le terme $2u_0 + nr$, donc :
$Sn = (n+1)\,\frac{2u0 + nr}{2} = (n+1)\,\frac{u0 + u0 + nr}{2} = (n+1)\,\frac{u0 + un}{2}$

La formule générale est donc la suivante :

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{(1^{er}\ terme + dernier\ terme)}{2}$$

On a en particulier $S_n = 0+1+2+3+4+\dots+n = (n+1)\times\frac{(0+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

VII. SUITES GEOMETRIQUES

1° Exemple

Considérons la suite des puissances de 2 :

$$2^0 = 1 \xrightarrow{\times 2} 2^1 = 2 \xrightarrow{\times 2} 2^2 = 4 \xrightarrow{\times 2} 2^3 = 8 \xrightarrow{\times 2} 2^4 = 16 \quad \ldots$$

On passe d'un terme à l'autre **en multipliant toujours par le même nombre 2.**
On dit alors que cette suite est **géométrique de raison 2.**

2° Définition

Une suite (v_n) est dite **géométrique** de raison strictement positive quand deux termes consécutifs sont liés par la relation :

$$\mathbf{v_{n+1} = q \cdot v_n}$$

où **q** est une constante réelle indépendante de n appelée **raison de la suite**.

On en déduit les expressions suivantes :

Expression de v_n en fonction de n : $v_n = v_0 \cdot q^n$

Relation entre v_m et V_p : $v_m = v_p \cdot q^{m-p}$

3° Somme des n+1 premiers termes

__**Démonstration**__ : Si la suite géométrique (v_n) a pour premier terme v_0, la somme de ses n+1 premiers termes est :

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$

Or, par définition, $v_n = v_0 \times q^n$ donc :
$S_n = v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 + \ldots + v_0 \times q^{(n-2)} + v_0 \times q^{(n-1)} + v_0 \times q^n$ on factorise par v_0 :
$S_n = v_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n)$ ❶
Si l'on multiplie par q, cela donne :
$q \times S_n = v_0 \times (q + q^2 + q^3 \ldots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)})$ ❷
❶ – ❷ $= S_n - q \times S_n$
$= v_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n) - v_0 \times (q + q^2 + q^3 \ldots + q^{(n-1)} + q^n + q^{(n+1)})$
$= v_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{(n-2)} + q^{(n-1)} + q^n - q - q^2 - q^3 \ldots - q^{(n-1)} - q^n - q^{(n+1)})$
$= v_0 \times (1 - q^{(n+1)})$
$\leftrightarrow S_n \times (1 - q) = v_0 \times (1 - q^{(n+1)})$
$\leftrightarrow S_n = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$, pour $q \neq 1$

La formule générale est donc la suivante :

$$\boxed{S_n = \text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{(1 - q)}}$$

Chapitre V : STATISTIQUES

I. RAPPELS

La statistique étudie des ensembles appelés **populations**, dont les éléments sont appelés des **individus**.

Un critère retenu pour analyser une population s'appelle un **caractère**. Le caractère est **quantitatif** s'il prend des valeurs numériques (Exemple : nombre de voitures possédées par une personne) sinon le caractère est **qualitatif** (Exemple : profession d'une personne).

Un caractère quantitatif est dit **continu** s'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. Il est **discontinu** ou **discret**, s'il ne peut prendre que des valeurs isolées.

La population étudiée peut être est répartie en un nombre fini de **classes**, pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.

On peut alors définir la **fréquence** d'une classe par $f = \frac{n}{N}$ avec n l'effectif de la classe et N l'effectif total de la population étudiée.

Lorsque le caractère est quantitatif (continu ou non), on range les valeurs (ou les classes) par ordre croissant. L'**effectif cumulé** jusqu'à la valeur k du caractère est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à k. La **fréquence cumulée** est le quotient de cet effectif cumulé par le nombre total d'individus.

Lorsque le caractère quantitatif est discret, on ordonne les valeurs de la série par ordre croissant. La **médiane** est le nombre tel qu'il y ait dans la série exactement autant de valeurs inférieures que supérieures. *Lorsque le caractère quantitatif est continu,* la **médiane** est le nombre m tel que l'effectif cumulé jusqu'à m soit la moitié de l'effectif total. Il revient au même de dire que c'est le nombre m tel que la fréquence cumulée jusqu'à m soit 0,5.

II. PARAMETRES D'UNE SERIE STATISTIQUE

1° Moyenne d'une série statistique

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les valeurs du caractère d'une série statistique et soient $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les effectifs correspondants. L'effectif total de la population est : $n = n_1 + n_2 + \ldots n_p$.

La **moyenne** de la série statistique, notée $\overline{x}$, est définie par :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{n}$$

2° Variance et écart-type

a - Définitions

La **variance** d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
La variance est le réel V défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$$

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i - \overline{x})^2 \textit{ avec } \mathrm{n} = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$$

L'**écart-type** est la racine carrée de la variance. On le note :

$$\sigma : \sigma = \sqrt{V}$$

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. S'il est grand, les valeurs sont très dispersées.

Pour le calcul pratique de la variance, on utilise le théorème suivant :

$$V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} - \bar{x}^2$$

b - Changement affine

Soit la série statistique X (x_i ; n_i) de variance V(X) et d'écart type $\sigma(X)$ et la série statistique Y (y_i ; n_i) de variance V(Y) et d'écart type $\sigma(Y)$ telle que : $\mathbf{y_i = a\,x_i + b}$.

On a alors les propriétés suivantes : $V(Y) = a^2\,V(X)$ et $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

3° Les quartiles

a - Définitions

Soit une série statistique de N valeurs (identiques ou non) rangées par ordre croissant.

La Médiane M_e
Si N est impair, la médiane est la valeur centrale. Si N est pair, la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales.

Le premier Quartile Q_1
La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à cette valeur correspond au premier Quartile Q_1.

Si on note N l'effectif total, Q_1 est le terme de rang supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$.

Pour des valeurs regroupées par classes, Q_1 est la valeur telle que la fréquence cumulée croissante soit égale à 0,25.

Le troisième Quartile Q_3
La plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à cette valeur correspond au troisième Quartile Q_3.

Si on note N l'effectif total, Q_3 est le terme de rang supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.

Pour des valeurs regroupées par classes, Q_3 est la valeur telle que la fréquence cumulée croissante soit égale à 0,75.

L'écart interquartile
L'écart interquartile correspond à la différence $Q_3 - Q_1$.

L'intervalle interquartile
L'intervalle interquartile est l'intervalle $I = [Q_1 ; Q_3]$.
<u>Exemple</u> :
Soit la série : 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 8 ; 9 ; 11 (dans l'ordre croissant).
On a N = 12

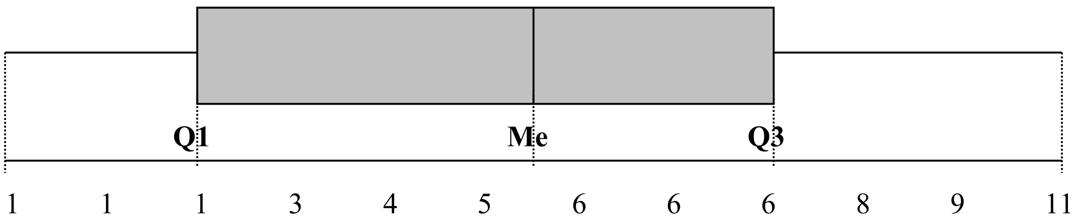
$\frac{N}{4} = 3$ d'où $Q_1 = 1$ (3e terme)

$\frac{3N}{4} = 9$ d'où $Q_3 = 6$ (9e terme)

On remarque que $M_e = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$

b - Diagramme en boîtes

Le diagramme en boîte regroupe le **premier quartile**, la **médiane** et le **troisième quartile**.
Si on reprend l'exemple ci-dessus, le diagramme en boîte sera ainsi :



La longueur du rectangle est égale à l'intervalle interquartile. On peut ainsi comparer rapidement des suites grâce à leur représentation graphique (diagramme en boîtes).

c - Changement affine

Soit la série statistique X (x_i ; n_i) ayant les quartiles $Q_1(X)$, $Q_3(X)$ et la médiane $M_e(X)$.
Soit la série statistique Y (y_i ; n_i) ayant les quartiles $Q_1(Y)$, $Q_3(Y)$ et la médiane $M_e(Y)$ telle que : $\mathbf{y_i = a\, x_i + b}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$M_e(Y) = a \times M_e(X) + b$

Si **a > 0 :** $Q_1(Y) = a\, Q_1(X) + b$ et $Q_3(Y) = a\, Q_3(X) + b$

Si **a < 0 :** $Q_1(Y) = a\, Q_3(X) + b$ et $Q_3(Y) = a\, Q_1(X) + b$

Chapitre VI : PROBABILITES

I. PROBABILITES

1° Evènement

Pour une expérience donnée, nous désignerons par Ω l'ensemble de toutes les issues possibles.
On appelle **évènement** A toute partie de l'univers. On appelle **cardinal de A**, noté card(A) le nombre d'éventualités qui composent A.
On dit que Ω est un évènement certain et Ø est un évènement impossible.
On dit que A est un **évènement élémentaire** si A est réduit à une seule éventualité.

Exemple : On jette un dé non truqué à six faces. L'ensemble des possibles est :
E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
Soit A l'évènement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ».
A = {5 ; 6} et card(A) = 2.
Soit B l'évènement « obtenir le nombre 6 ».
B= {6} et B est un évènement élémentaire.

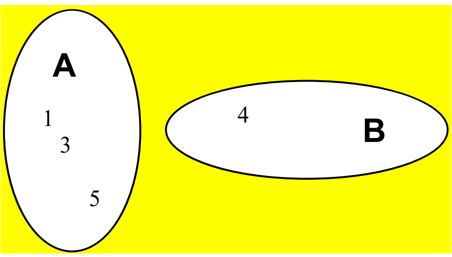
1° Union et intersection d'évènements

Soit deux évènements A et B :

- **L'évènement** $A\cap B$ (A inter B) est réalisé si A et B sont réalisés tous les deux.
- **L'évènement** $A\cup B$ (A union B) est réalisé si l'un au moins des évènements est réalisé.

Exemple : On reprend l'exemple précédent.
Soit C l'évènement : « obtenir un nombre impair ».
C = {1 ; 3 ; 5}
L'évènement $A \cup C$ est « obtenir un nombre au moins égal à 5 ou un nombre impair ».
$A \cup C$ = {1 ; 3 ; 5 ; 6}.
L'évènement $A \cap C$ est « obtenir un nombre au moins égal à 5 et un nombre impair » c'est-à-dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 5 ».
$A \cap C$ = {5}.

On dit que deux évènements A et B sont **disjoints** ou incompatibles si A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un nombre impair et B à l'obtention d'un multiple de 4, alors A et B sont incompatibles.



Dans ce cas, $A \cap B$ = Ø.
On dit que A et B sont contraires ou complémentaires si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$. Dans ce cas, on note
Erreur ! l'évènement contraire de l'évènement A.

2° Loi de probabilité

On note $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 \; \dots \; \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un évènement A, notée P (A), est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Pour toute éventualité w_i, on a : $0 \le p_i \le 1$.

Remarque : Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

Propriétés :

Soient A et B deux évènements de Ω, alors :

- La probabilité de l'évènement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$.

- La probabilité de l'évènement impossible est 0 ; $P(\emptyset) = 0$.

- Si $A \subset B$, alors $P(A) \le P(B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- P (**Erreur !**) = 1 – P (A).

3° Equiprobabilité

Pour une situation donnée, il y a **équiprobabilité** si tous les évènements élémentaires d'un univers ont la même probabilité.

Dans ce cas, pour un évènement A quelconque, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

$$\text{soit : } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple : Dans le lancé, le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité de l'évènement C : « obtenir un nombre impair » est : $P(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

4° Loi des grands nombres

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle **fréquence d'apparition** d'une éventualité donnée, noté w $_i$ le nombre :

$$f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce résultat est appelé **loi des grands nombres**.

II. VARIABLE ALEATOIRE

1° Définitions

Pour une expérience donnée, on appelle Ω l'ensemble de toutes les issues possibles (ensemble supposé fini).

On appelle **variable aléatoire réelle X** une fonction définie sur l'univers des possibles Ω à valeurs réelles. Par exemple, X peut représenter le nombre de 5 apparaissant à chaque tirage de 6 dés.

L'**univers image** de Ω par la variable X est l'ensemble : $X(\Omega) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Les x_i sont les valeurs que peut prendre la fonction X.

Chaque x_i possède une probabilité p_i. La **loi de probabilité** de la variable X est la fonction qui à chaque x_i de X associe sa probabilité $P(X=x_i)$ ou p_i.

2° Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel E(X) donnée par la formule suivante :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

L'espérance mathématique correspond à « l'espoir de gain ».

Variance et écart-type

La **variance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel V(X) donnée par la formule suivante :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 \ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2$$

L'**écart-type** est la racine carrée de la variance. On le note σ :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On peut calculer plus rapidement la variance grâce à la formule suivante :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 p_i - (E(x))^2$$

Chapitre VII : LOI BINOMIALE

I. REPETITION D'EXPERIENCES INDEPENDANTES

1° Définitions

On considère n expériences aléatoires identiques successives. Si les résultats de chacune de ces expériences ne dépendant pas des résultats des expériences précédentes, alors ces expériences sont indépendantes.
Exemple : Plusieurs tirages successifs d'une boule dans une urne contenant n boules, avec remise. ($n > 1$).

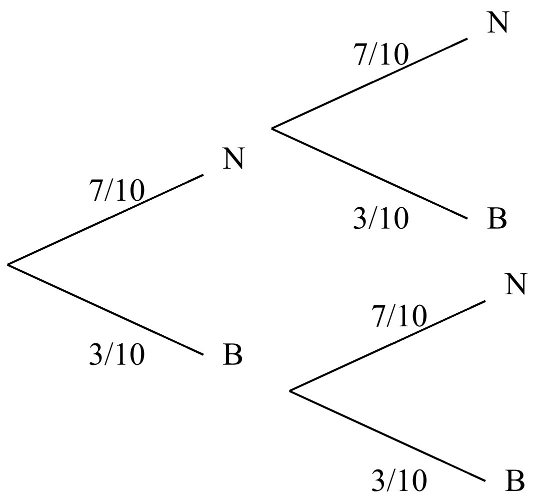
2° Arbre pondéré

Lors de la répétition d'expériences identiques et **indépendantes**, la probabilité d'une liste de résultats est le **produit** des probabilités de chaque résultat.
Un arbre pondéré est un schéma pour lequel on note la probabilité de réalisation d'un résultat sur chaque branche aboutissant à ce résultat. On peut donc suivre le long des branches une liste de résultat et ainsi calculer la probabilité de réalisation de cette liste.

Exemple :
Une urne contient 10 boules : 7 noires et 3 blanches.
La loi de probabilité correspondant à un tirage est donc :

résultat	noire	blanche
probabilité	7/10	3/10

On tire successivement deux boules dans l'urne, avec remise. Le résultat du premier tirage n'influencera pas le résultat du second, car il y a remise. Les tirages sont donc indépendants. Les probabilités inscrites sur les branches du deuxième niveau dans l'arbre sont donc les mêmes que celles du premier niveau.



L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 4 couples de résultat, correspondant aux 4 chemins de l'arbre.
La probabilité d'obtenir le couple (N,N) est : $p(N,N) = p(N) \times p(N) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$
En procédant de même pour les autres résultats, on obtient la loi de probabilité suivante :

résultat	(N,N)	(N,B)	(B,N)	(B,B)
probabilité	$\frac{49}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{9}{100}$

Remarque : la somme des probabilités d'une loi de probabilité est toujours égale à 1.
Ici : $\frac{49}{100} + \frac{21}{100} + \frac{21}{100} + \frac{9}{100} = \frac{100}{100} = 1$

II. EPREUVE ET SCHEMA DE BERNOULLI

1° Loi et paramètres de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une épreuve aléatoire admettant deux issues contraires :
- Le **succès** noté S de probabilité **p**
- L'**échec** noté E de probabilité **q = 1 – p**

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue S et 0 à l'issue E.

La loi de probabilité de X s'écrit donc :

X	0	1
P(X)	q = 1 - p	P

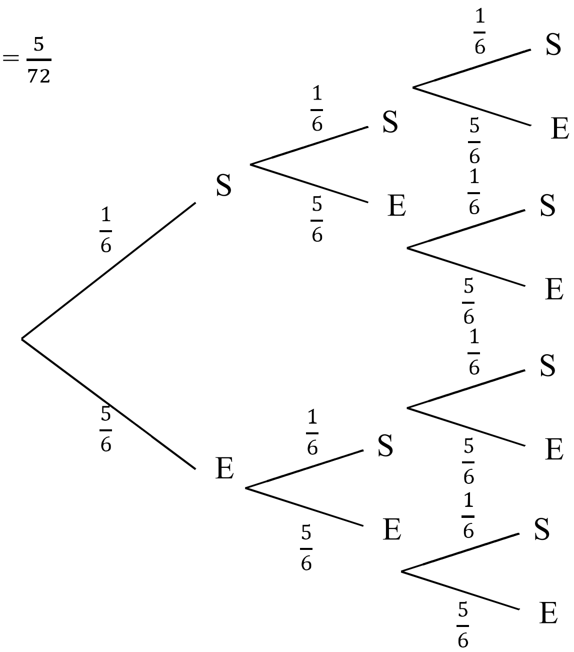
Propriétés : $\boxed{E(X) = p \text{ (espérance)}}$ $\boxed{V(X) = p(1-p) \text{ (variance)}}$
X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p.

2° Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli correspond à la répétition de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, n fois de façon indépendante.

Exemple : On lance trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. L'issue « obtenir un 4 » est le succès.
On a un schéma de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès (soit le nombre de 4 obtenus) à l'issue des 3 lancers de dé.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et $p = \frac{1}{6}$.
X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3 correspondant aux nombres de sortie du nombre 4 (on peut obtenir, sur 3 lancers, aucun 4, un seul 4, deux 4 etc.)

Si l'on choisit l'événement « obtenir deux succès » (X = 2), les résultats favorables à cet événement sont : (S ; S ; E), (E ; S ; S), (S ; E ; S).
Par consequent: P(X=2) =
P(S ; S ; E) + P(E ; S ; S) + p (S ; E ; S) $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$
$= 3 \times (\frac{1}{6})^2 \times \frac{5}{6}$
ou encore $3 \times p^2 \times q = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$



III. LOI BINOMIALE

1° Loi binomiale

On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli représenté par un arbre, et k un entier compris entre 0 et n.
L'entier$\binom{n}{k}$, appelé coefficient binomial, est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès.
Remarque : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$
<u>Exemple</u> : Pour n = 3 il existe 4 coefficients binomiaux : $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{3}{3} = 1$

La loi de probabilité de X est définie par : pour tout entier k compris entre 0 en n,

$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$ $\boxed{\text{Espérance : } E(X)= np}$ $\boxed{\text{Variance : } V(X) = np(1-p)}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n ; p)$

2° Propriété des coefficients binomiaux

a - <u>Symétrie</u>

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b - <u>Relation de Pascal</u>

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$, on a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
Démonstration : On considère la répétition de n + 1 épreuves à deux issues (succès S et échec E)
$\binom{n}{k+1}$ est le nombre de chemins réalisant k+1 succès lors des n+1 répétitions.

Il y a deux façons de réaliser ce chemin :
❶ Soit les k+1 succès déjà obtenus au bout de n répétitions, il faudra nécessairement obtenir un échec lors de la (n+1)-ième expérience.

$(\underbrace{\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots}_{\text{k+1 succès lors des n premières répétitions}} ; E)$

(n+1)-ième expérience

Il y a autant de chemins de ce type que de chemins réalisant k+1 succès lors de n répétitions soit $\binom{n}{k+1}$

❷ Soit seulement k succès sont obtenus au bout de n répétitions, il faudra alors nécessairement obtenir un succès lors de la (n+1)-ième expérience.

$(\underbrace{\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots ;\ldots}_{\text{k succès lors des n premières répétitions}} ; S)$

(n+1)-ième expérience

Il y a autant de chemins de ce type que de chemins réalisant k succès lors de n répétitions soit $\binom{n}{k}$.
La somme de ces chemins représente tous les chemins réalisant k+1 succès lors des n+1 répétitions donc :

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

IV. ECHANTILLONNAGE

1° Principe de la méthode

a - <u>Modèle théorique</u>

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et on note P(A) la probabilité d'un évènement A donnée.
On réalise n fois l'expérience et on note f la fréquence d'apparition de l'évènement A.
On peut modéliser l'expérience par une épreuve de Bernoulli, le succès correspondant à l'événement A et l'échec à l'événement contraire $\bar{A}$.

La répétition n fois de cette épreuve de façon indépendante est modélisée par un schéma de Bernoulli à n épreuves.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves.
Si p(A) = p, alors la loi de probabilité de X est la loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p).

b - Comparaison avec le modèle expérimental

On pose Y= $\frac{X}{n}$, Y correspondant à la fréquence théorique d'obtention du succès au cours des n épreuves. On peut donc comparer la fréquence théorique et la fréquence observée expérimentalement.
Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation à 95% associé à la loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p), alors l'hypothèse P(A) = p est acceptée, sinon elle est rejetée.
La probabilité de réaliser un rejet par erreur est dans ce cas inférieure à 5%.

2° Prise de décision à l'aide d'une loi binomiale

a - Définition

L'intervalle de fluctuation à 95% associé à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p) est l'intervalle $[\frac{k1}{n} ; \frac{k2}{n}]$ où k1 et k2 sont les deux entiers naturels définis par :

- k1 est le plus petit des entiers k vérifiant $P(X \leq K) > 0{,}025$;
- k2 est le plus petit des entiers k vérifiant $P(X \leq K) \geq 0{,}975$.

b - Critère de décision

On veut examiner l'hypothèse P(A) = p.
Soit f la fréquence d'apparition observée de l'événement A dans un échantillon d'expériences répétées de taille n.
On désigne par I l'intervalle de fluctuation à 95% associé à la loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p).

- Si $f \in I$, l'hypothèse est acceptée
- Si $f \notin I$, l'hypothèse est rejetée avec une probabilité < 5% d'avoir rejeté une hypothèse vraie.

Exemple : On lance une pièce non truquée. Soit A l'événement « obtenir face ». Comme la pièce est non truquée, on considère que P(A) $=\frac{1}{2}$ = p On veut savoir si la pièce n'a pas de défaut de fabrication conduisant à mettre cette hypothèse en défaut.
On réalise l'expérience aléatoire (lancer de la pièce) 100 fois de suite (n =100). On note que l'on obtient 52 piles et 48 faces.
A l'aide d'un tableur, on détermine les valeurs de $P(X \leq k)$ pour tous les entiers k compris entre 0 et 100.
On lit alors dans le tableur : k1 = 40 et k2 = 60.
L'intervalle de fluctuation à 95% associé à la variable aléatoire X suivant la loi binomiale B(100 ; 0,5) est I = $[\frac{40}{100} ; \frac{60}{100}]$ = [0,4 ; 0,6].
Calculons la fréquence expérimentale d'apparition du « face », noté f :
$f = \frac{48}{100} = 0{,}48 \in [0{,}4 ; 0{,}6]$.
Comme $f \in I$, alors l'hypothèse est acceptée.

B1 =LOI.BINOMIALE(A1;100;0,5;VRAI)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	7,9675E-29	26	8,3368E-07	51	0,61782328	76	0,99999997
2	2	3,9845E-27	27	2,3462E-06	52	0,69135029	77	0,99999999
3	3	1,3154E-25	28	6,2896E-06	53	0,75794079	78	1
4	4	3,2248E-24	29	1,608E-05	54	0,81589919	79	1
5	5	6,2616E-23	30	3,9251E-05	55	0,86437349	80	1
6	6	1,003E-21	31	9,1572E-05	56	0,90332605	81	1
7	7	1,3631E-20	32	0,00020439	57	0,93339469	82	1
8	8	1,6043E-19	33	0,00043686	58	0,95568696	83	1
9	9	1,661E-18	34	0,00089497	59	0,97155603	84	1
10	10	1,5316E-17	35	0,00175882	60	0,9823999	k2 85	1
11	11	1,2704E-16	36	0,00331856	61	0,98951063	86	1
12	12	9,5568E-16	37	0,00601649	62	0,99398351	87	1
13	13	6,5649E-15	38	0,01048937	63	0,99668144	88	1
14	14	4,1422E-14	39	0,0176001	64	0,99824118	89	1
15	15	2,4127E-13	40	0,02844397	k1 65	0,99910503	90	1
16	16	1,303E-12	41	0,04431304	66	0,99956314	91	1
17	17	6,549E-12	42	0,06660531	67	0,99979561	92	1
18	18	3,0739E-11	43	0,09667395	68	0,99990843	93	1
19	19	1,3514E-10	44	0,13562651	69	0,99996075	94	1
20	20	5,5795E-10	45	0,18410081	70	0,99998392	95	1
21	21	2,1687E-09	46	0,24205921	71	0,99999371	96	1
22	22	7,9527E-09	47	0,30864971	72	0,99999765	97	1
23	23	2,7568E-08	48	0,38217672	73	0,99999917	98	1
24	24	9,05E-08	49	0,46020538	74	0,99999972	99	1
25	25	2,8181E-07	50	0,53979462	75	0,99999991	100	1

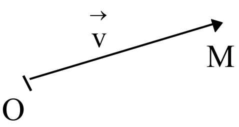
Chapitre VIII : GEOMETRIE PLANE

I. RAPPEL SUR LES VECTEURS

1° Définition - Représentation

Un vecteur $\vec{v}$ est défini par : $\begin{cases}\text{une direction}\\ \text{un sens}\\ \text{une longueur, appelée norme du vecteur}\end{cases}$

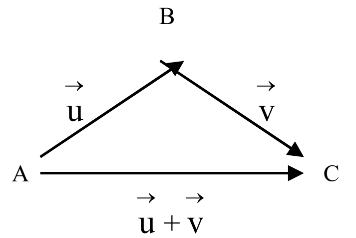
une origine et une extrémité



Si on se donne un vecteur $\vec{v}$ et un point O, il existe un unique point M tel que : $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$.

2° Opérations sur les vecteurs

a - Somme de deux vecteurs



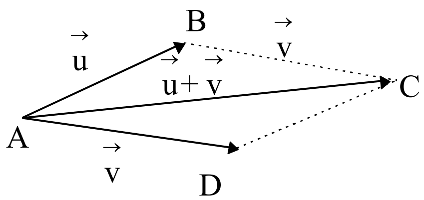
La somme de deux vecteurs peut se construire de deux manières.

Soit par la **relation de Chasles** :

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Soit en construisant le **parallélogramme** ABCD :

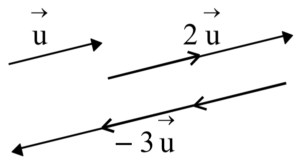
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$



b - Produit d'un vecteur par un réel

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel λ non nul est $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction
- ils sont de même sens si $\lambda > 0$ et de sens contraire si $\lambda < 0$
- $\left\|\vec{v}\right\| = |\lambda| \times \left\|\vec{u}\right\|$



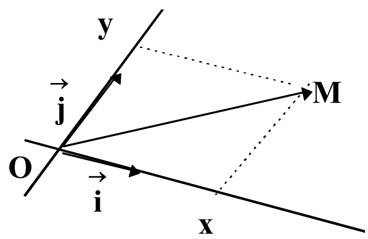
3° Repères - Coordonnées dans le plan

On appelle **repère** du plan un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne soient pas colinéaires. $(\vec{i}, \vec{j})$ forme alors une base du plan. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **orthogonaux** et de **même norme égale à 1**, le repère est **orthonormé**.

Dans un repère, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

x et y sont appelés les **coordonnées de** $\vec{u}$ et on note $\vec{u}$ (x,y).

De même, on définit les **coordonnées (x,y) d'un point M** comme l'unique couple de réels vérifiant: $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$



Etant donnés deux points A et B du plan, de coordonnées respectives (x_A,y_A) et (x_B,y_B),

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A \end{cases}$

Si $\vec{u} = (x,y)$, alors $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

II. COLINEARITE DE DEUX VECTEURS

1° Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.
Les coordonnées de vecteurs colinéaires sont donc proportionnelles.

On en déduit que les points A, B et C sont alignés s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

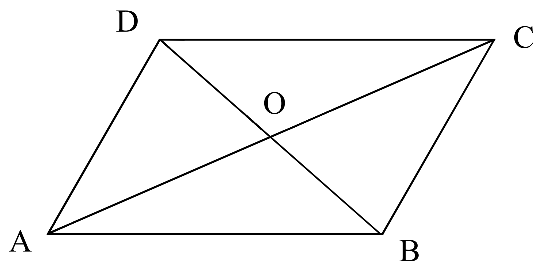
2° Propriété

Soient $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs du plan.
Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si **$xy' - x'y = 0$**

III. EXPRESSION D'UN VECTEUR

Soient $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs non colinéaires du plan.
Alors pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un couple unique de réel (a ; b) tel que $\boldsymbol{\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}}$
Le couple (a ; b) est appelé couple des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{\vec{w}}$ dans la base **$(\vec{u}\,;\vec{v})$.**

Exemple : ABCD est un parallélogramme de centre O. On veut exprimer le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{u} = \overrightarrow{AO}$ et de $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}$.



IV. EQUATIONS CARTESIENNES D'UNE DROITE

1° Vecteurs directeurs

Soit D une droite du plan. Elle peut être définie de différentes façons :

- Par **un point** A et un **vecteur directeur** $\vec{u}$. Un point M appartient à D si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = \mathbf{k}\,\vec{u}$.

- Par **deux points** A et B. On utilise alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur.

2° Equations cartésiennes

a - <u>Définitions</u>

Les coordonnées (x ; y) de tous les points M d'une droite D vérifient une **équation cartésienne** de la forme :

$$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

ou a, b et c sont des réels, avec (a,b) $\neq$ (0, 0)

<u>Exemple</u> : La droite D passe par le point A (-2 ; 3) et est dirigée par $\vec{u}$ (2 ; 5). Soit M (x ; y) un point appartenant à D, on a donc $\overrightarrow{AM}$ (x+2 ; y-3).

Par définition, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, on a donc :

$(x+2) \times 5 - (y-3) \times 2 = 0$

$5x + 10 - 2y + 6 = 0$

$5x - 2y + 16 = 0$ est une équation cartésienne de la droite D.

b - <u>Propriétés</u>

Propriété 1 : Soient les réels a, b, c, a', b', c' avec (a ; b) $\neq$ (0, 0) et (a ; b') $\neq$ (0 ; 0).

L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant ax + by + c = 0 est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (-b ; a).

Propriété 2 : Les droites D et D' d'équation respectives ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0 sont parallèles, si et seulement si, (a ; b) et (a' ; b') sont proportionnels.

<u>Exemple</u> : Soit deux droites D et D' admettant pour équations cartésiennes :

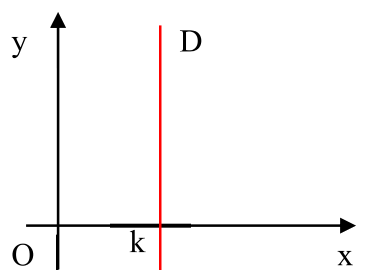
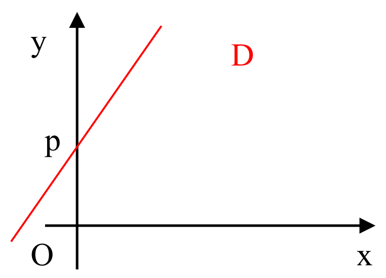
D : $2x - y + 3 = 0$

D' : $-4x + 2y + 1 = 0$

D admet donc pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2) et D' le vecteur $\vec{v}$ (-2 ; -4) (propriété 1)

Les couples (2 ; -1) et (-4 ; 2) sont proportionnels (facteur -2), on en déduit que D et D' sont parallèles (propriété 2).

3° Lien entre équation réduite et équation cartésienne

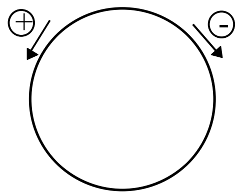
Equation cartésienne	**Equation réduite**	
Soit D la droite d'équation cartésienne ax + by + c = 0 avec (a,b) $\neq$ (0, 0) Le vecteur de coordonnées (-b ; a) est un vecteur directeur de D.	Si b = 0 : x = k (avec k réel) Le vecteur de coordonnées (0 ; 1) est un vecteur directeur de D.  	Si b $\neq$ 0 y = mx + p Le vecteur de coordonnées (1 ; m) est un vecteur directeur de D. 

Chapitre IX : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

I. ANGLES ORIENTES

1° Orientation du plan

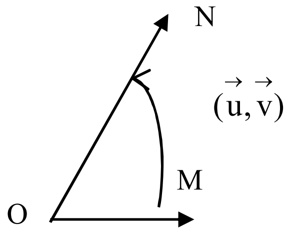
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (ou négatif).
Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.



Par **convention**, le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé le **sens trigonométrique**, **sens positif ou direct.**

2° Définitions

Considérons deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On choisit un point origine O et on construit les points M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$.



La notation $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ désigne l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre.

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté de mesure α. Alors chacun des nombres $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une mesure de cet angle. Cet angle orienté se mesure en **radians**.
La **mesure principale** est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

3° Propriétés

Relation de Chasles

Pour trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

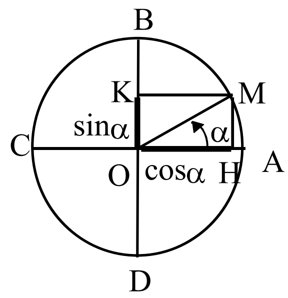
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :
$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$ (vecteurs de même sens)
ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ (vecteurs de sens contraire)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :
$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

II. CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Le **cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté positivement**.
On lit sur le cercle le cosinus et le sinus de l'angle α.

α est une mesure en **radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
On a alors OH = **cos α** et OK = **sin α** (OH et OK pouvant être positif ou négatif, les deux axes étant gradués de –1 à 1 avec OA=1, OC=-1, OB=1 et OD=-1)



En posant $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}}$$

Le cercle étant de rayon 1, il apparaît par Pythagore que :
$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$.

Par ailleurs, on notera que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct car $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

III. FORMULES TRIGONOMETRIQUES

1° Formules d'addition

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

2° Formules de duplication

A partir des formules précédentes, on peut retrouver en remplaçant y par x, les formules suivantes:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x)$$

3° Valeurs à connaître

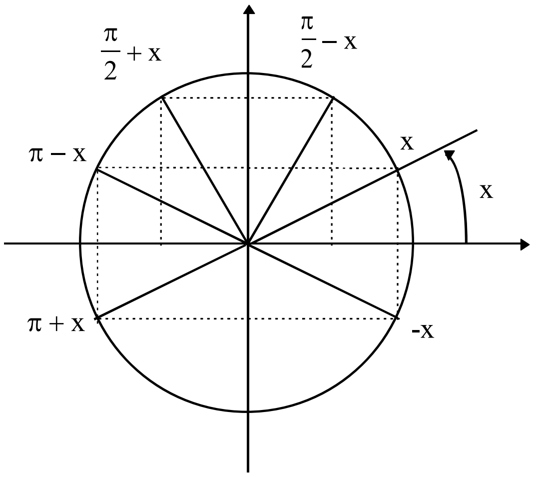
Un certain nombre de valeurs usuelles de ces fonctions pour des **angles particuliers** sont à retenir :

X	sin (x)	cos (x)
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

4° Formules des angles associés usuelles

Le cercle trigonométrique permet de calculer des valeurs de ces fonctions aux points $x+\pi$, $-x$, $\pi/2+x$, $\pi/2-x$, $\pi-x$ en connaissant la valeur en x.
On a alors les formules suivantes :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



cos (π-x) = - cos(x)
sin (π-x) = sin(x)

cos (π+x) = -cos(x)
sin (π+x) = -sin(x)

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

L'équation : **cos (x) = cos (α)** <u>équivaut dans ℝ à</u> **$x = \alpha + 2k\pi$ ou (k entier relatif) $x = -\alpha + 2k\pi$**

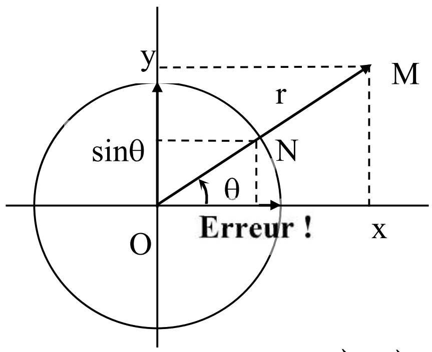
L'équation : **sin (x) = sin (α)** <u>équivaut dans ℝ à</u> **$x = \alpha + 2k\pi$ ou (k entier relatif) $x = \pi - \alpha + 2k\pi$**

V. COORDONNEES POLAIRES

1° Définition

Les **coordonnées polaires** d'un point M (distinct de l'origine) du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont définies par le couple (r , θ) tel que :

$r = OM$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$.



<u>Exemple</u> :

Les cordonnées polaires du point A tel que : $OA = \sqrt{5}$ et $(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{5}$ sont $(\sqrt{5}, \frac{2\pi}{5})$.

2° Relations entre cordonnées polaires et cartésiennes

Soit un point M (distinct de l'origine) de coordonnées cartésiennes (x,y) et de coordonnées polaires (r, θ).
Les coordonnés polaires et cartésiennes du point M sont liées par les relations suivantes :

$x = r\times\cos\theta$; $y = r\times\sin\theta$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Chapitre X : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

I. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

1° Définition

On se place dans un repère orthonormé.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées (x,y) et (x',y').

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **réel** $xx'+yy'$.

On note $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$. ($\vec{u}\cdot\vec{v}$ se lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».)

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2}$ est appelé le **carré scalaire** de $\vec{u}$.

2° Propriétés

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot\vec{0} = 0$

$\vec{u}\cdot k\vec{v} = k \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

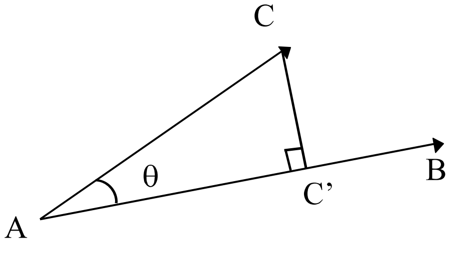
$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

ATTENTION !
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ ne prouve pas du tout que $\vec{v} = \vec{w}$

3° Autres expressions du produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$$

avec C' projection orthogonale de C sur (AB)

Si $\overrightarrow{AC'}$ est le projeté de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) alors on a la propriété suivante :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$$

II. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1° Liens avec la norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x,y). On définit la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ par :

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ On peut alors écrire : $AB^2 = \overrightarrow{AB}^{\,2} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

2° Orthogonalité

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** si leurs directions sont perpendiculaires, ce qui se traduit avec le produit scalaire par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan de coordonnées (x , y) et (x', y') alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x x' + y y' = 0$$

> **ATTENTION !**
> $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie que $\vec{u} = 0$
> ou que $\vec{v} = 0$
> ou que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

3° Colinéarité

Pour des vecteurs colinéaires de même sens : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

Pour des vecteurs colinéaires de sens opposé : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = - AB \times AC$

4° Vecteur normal et équation de droite

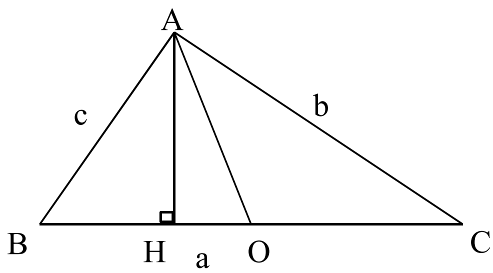
Un **vecteur normal** d'une droite D est un vecteur $\vec{\mathbf{n}}$ non nul orthogonal à la direction de D.

Si la droite D a pour équation ax + by + c = 0, le vecteur $\vec{n}$ (a,b) est normal à D.

Pour trouver une équation de la droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'écrire que $M \in D$ si et seulement si : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

5° Conséquences géométriques dans le triangle

a - Théorème de la médiane



Soit le triangle ABC et O le milieu de BC.

$$AB^2 + AC^2 = 2\,OA^2 + \frac{1}{2}\,BC^2$$

$$AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\,\overline{OH} \times \overline{BC}$$

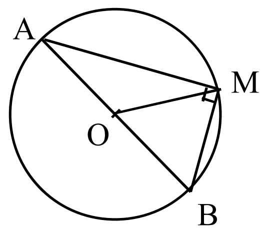
b - Relations entre les cotés et les angles d'un triangle

$$\text{Formules d'Al-Kashi :} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{A} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \times \cos\widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{C} \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Si S est l'aire du triangle ABC : $S = \frac{1}{2} ca \times \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} ab \times \sin\widehat{C} = \frac{1}{2} bc \times \sin\widehat{A}$

6° Equation de cercle



Une équation de cercle de centre O et de rayon r s'obtient en traduisant avec les coordonnées l'égalité $\overrightarrow{OM}^2 = r^2$

Une équation de cercle de diamètre [AB] s'obtient en traduisant avec les coordonnées l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

L'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est celle d'un cercle de centre O(a,b) à condition que $a^2 + b^2 - c > 0$.

Cette équation peut alors s'écrire sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ où r est le rayon du cercle.

Si $a^2 + b^2 - c = 0$, le cercle est réduit au point O(a,b)

III. LIEUX GEOMETRIQUES

1° Définition

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points. Pour déterminer un lieu géométrique, il faut bien repérer les **éléments fixes** et les **éléments variables** ainsi que ce qui les relie.

Par exemple, chercher les points M équidistants à deux points A et B fixés est la recherche d'un lieu géométrique. Les points M se trouvent sur une droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu de [AB]. Les points M décrivent la médiatrice. Le lieu géométrique des points M équidistants de deux points A et B s'appelle la médiatrice.

2° Lignes de niveau

Les lignes de niveaux (chaque k correspond à une ligne de niveau) sont des lieux géométriques qui correspondent par exemple aux cas suivants :

Soient A et B deux points et k un nombre donné (fixé).

- L'ensemble des points M (variables) tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ est une droite perpendiculaire à (AB).

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est :

- soit un cercle de centre le milieu de [AB] si $k > -\frac{1}{4}AB^2$
- soit le milieu de [AB] si $k = -\frac{1}{4}AB^2$
- soit l'ensemble vide si $k < -\frac{1}{4}AB^2$

Chapitre XI : ALGORITHMIQUE

I. GENERALITES

1° Définition

La mémoire d'un ordinateur peut être assimilée à une multitude de petites boites, ayant chacune un nom et contenant chacune une donnée pouvant être modifiée.
Une variable est une de ces boites.

2° Les types de données

Les données stockées dans les variables peuvent être des nombres, des caractères, des chaines de caractères ou des tableaux (un tableau pouvant contenir des nombres, des caractères ou des chaines)
Attention : Selon les logiciels, la numérotation d'un tableau peut commencer à 0 ou à 1.

II. LES INSTRUCTIONS

1° L'affectation

Une affectation est une instruction visant à modifier le contenu de l'une des variables de la mémoire.
Une expression s'écrit :

```
x = expression
```

où **x** est le nom de la variable
et **expression** est une expression algébrique pouvant comporter des noms de variable et des opérateurs (+, -, ×, /)
Remarque : Certains logiciels permettent d'utiliser les fonctions usuelles comme la fonction racine carrée par exemple.

Exemple :
Soit l'état de mémoire suivant :
x = 4 et y = 6
Soit l'affectation suivante :

```
y = x + 1 ;
```

Le calcul x + 1 = 4 + 1 = 5 est effectué, cette affectation modifie le contenu de la variable y qui est égale à 5 maintenant.
L'état de mémoire devient :
x = 4 et y = 5

2° La séquence

Une séquence est une instruction qui sert à enchainer deux instructions.

Expression d'une séquence :

```
instruction1 ;
instruction2 ;
```

Exemple :
Soit la séquence suivante :

```
x = y – 3 ;
y = x + 7 ;
```

Si on l'exécute dans l'état de mémoire précédent (x = 4 et y = 5), cela donne :
Etape 1 : l'instruction x = y – 3 = 5 – 3 = 2 est exécutée, on obtient l'état de mémoire suivant : x = 2 et y = 5.
Etape 2 : l'instruction y = x + 7 = 2 + 7 = 9 est exécutée, on obtient l'état de mémoire suivant : x = 2 et y = 9.

3° Le test

Un test est une instruction servant à exécuter une instruction si une condition est vraie, et éventuellement à exécuter une autre instruction si la condition est fausse.
Une condition comporte des expressions algébriques et des symboles. En programmation, les symboles à utiliser sont :

==	égal
<	strictement inférieur
>	strictement supérieur
<=	inférieur ou égal
>=	supérieur ou égal
!=	différent

Ces expressions sont de type **booléen**, il n'y a que deux solutions possibles : la condition est remplie ou elle ne l'est pas.

Expression d'un test :

```
Si condition alors
        Instruction1 ;
Sinon
        Instruction2 ;
FinSi
```

Exemple :
Soit l'état de mémoire suivant : $x = 8$, $y = 10$ et $z = 12$.
On exécute le test suivant :

```
Si x < y alors
        x = x + 2 ;
Sinon
        y = z – 6 ;
        x = y + 1 ;
FinSi
```

Comme $x = 8$ et $y = 10$, alors $x < y$, la condition est vraie, l'instruction $x = x + 2$ est alors exécutée.
On se retrouve alors dans l'état de mémoire suivant : $x = 10$ et $y = 10$.

4° La boucle

Une boucle est une instruction qui sert à répéter une instruction plusieurs fois.
Il existe deux types de boucle :

a - La boucle Tant que

La boucle « **Tant que** » s'utilise lorsque l'on veut exécuter une instruction plusieurs fois, jusqu'à ce qu'une certaine condition soit atteinte.

Expression d'une boucle Tant que :

```
TantQue condition exécuter
    Instruction ;
FinTantQue
```

Exemple :
Soit l'état de mémoire suivant : $x = 2$
On exécute la boucle suivante :

```
TantQue x < 10 exécuter
        x = x + 2 ;
FinTantQue
```

Dans l’état de mémoire initial, x = 2 donc la condition est respectée, on rentre dans la boucle et l’instruction x = x + 2 est exécutée. Le nouvel état de mémoire est donc : x = 4.
Ce processus se répète tant que x < 10 et x prend donc les valeurs 4, 6, 8,10.
Lorsque x = 10, la condition n’est plus respectée, on sort de la boucle.
L’état de mémoire final est donc x = 10.

b - La boucle Pour

La boucle « **Pour** » s’utilise lorsque l’on connait à l’avance le nombre de fois que l’on veut exécuter une instruction.

Expression d’une boucle pour :

```
Pour condition exécuter
    Instruction ;
FinPour
```

Exemple :
Soit l’état de mémoire suivant : x = 7
On exécute la boucle suivante :

```
Pour i allant de 1 à 3
exécuter
        x = x - 1;
```

L’instruction x = x - 1 est exécutée 3 fois (pour i = 1, pour i = 2 et pour i = 3).
La variable x prend donc les valeurs 6, 5, 4.
La variable i joue un rôle de compteur et contrôle le nombre d’exécutions de l’instruction.
L’état de mémoire final est donc x = 4.

5° Autres instructions utiles

a - Les commentaires

L’instruction **AFFICHER** « commentaire » permet l’ajout d’un commentaire facilitant la lecture des résultats

Exemple :

```
x = 2 ;
afficher « la variable x a pour valeur »;
afficher x ;
```

L’algorithme affichera donc « la variable x a pour valeur 2 »

b - La pause

L’instruction **PAUSE** provoque l’arrêt de l’exécution de l’algorithme (pour lire un résultat intermédiaire par exemple)

c - Les fonctions

Des fonctions sont disponibles dans tous les logiciel, comme l’instruction **NBREALEA (1, N)** qui permet d’obtenir un nombre entier aléatoire compris entre 1 et N.

Exemple :
Voici un algorithme ayant le même rôle qu’un dé à 6 faces, c'est-à-dire qu’il va renvoyer un nombre, au hasard, entre 1 et 6 :

```
x = NBREALEA(1,6) ;
afficher x ;
```

Partie B : EXERCICES

-  : exercices d’application directe du cours.
-  : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
-  : exercices plus difficiles ou plus longs.

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

Résolution d'équations du second degré

1.1 - - Résoudre dans ℝ, les équations du second degré suivantes :

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
b) $x^2 - 2x - 35 = 0$
c) $4x^2 + 2x + 15 = 0$
d) $x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 = 0$
e) $-x^2 + x = 2$
f) $1 - t - 2t^2 = 0$

1.2 - - Résoudre dans ℝ, sans calculer le discriminant et à l'aide d'une racine évidente, les équations du second degré suivantes (formule de la somme et du produit des racines) :

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
b) $2x^2 + x - 1 = 0$
c) $4x^2 + 18x + 20 = 0$
d) $-3x^2 + 2x + 5 = 0$
e) $x^2 + \left(\sqrt{2} - 3\right)x - 3\sqrt{2} = 0$
f) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

1.3 - **- Corrigé** - Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\dfrac{(x+1)}{(x+2)} + \dfrac{3x}{(x-1)} = 0$
b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 2 = 0$
d) $x^3 + 2x^2 + 4x = 0$
e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
f) $(2 - x - x^2)^2 = 4$

Résolution d'inéquations du second degré

1.4 - - Résoudre dans ℝ, les inéquations du second degré suivantes :

a) $x^2 + 3x - 1 \geq 0$
b) $x^2 + x + 1 < 0$
c) $x^2 + 10x + 25 \leq 0$
d) $-3x^2 + 1 \geq 0$
e) $x^2 - x \geq 0$
f) $29x \geq x^2 - 96$

1.5 - **- Corrigé** - Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{5x^2 + 18x + 13}{x^2 + 4x + 3} \geq 0$

1.6 - -Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ (x+3)(x-4) \leq 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + 9x + 8 \leq 0 \\ \dfrac{(x+3)}{(x-4)} \leq 0 \end{cases}$

Factorisations, signe du trinôme

1.7 - **-Corrigé-** Soit l'équation :

$E(x) = x^3 + ax + b$

Trouver a et b pour que 1 soit racine double.
Factoriser alors E(x) puis résoudre $E(x) > 0$

1.8 - -Ecrire les polynômes suivants sous la forme d'un produit de deux polynômes du premier degré :

a) $f(x) = x^2 + 5x - 24$
b) $f(x) = -3x^2 + 3x + 4$
c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
d) $f(x) = x^2 + 6x - 10$

1.9 - - Donner en fonction de x, le signe des trinômes suivants :

a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 24$
b) $f(x) = -4x^2 + 2x + 5$
c) $f(x) = 0{,}3x^2 - 6x + 19$
d) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

Mise en équation

1.10 - **- Corrigé** -Mettre en équation et résoudre les problèmes suivants :

a) La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans cinq ans, le produit de leurs âges sera 990. Quels sont leurs âges?
b) Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est 509.
c) Trouvez tous les triplets d'entiers consécutifs dont le produit est égal à la somme.

1.11 - - Mettre en équation et résoudre les problèmes suivants :

a) Un père et son fils travaillent chez le même entrepreneur. Le père reçoit 880 Euros après un certain nombre de jours de travail. Le fils qui a travaillé 5 jours de moins ne reçoit que 400 Euros. Trouver le nombre de jours de travail et le salaire quotidien de chacun sachant que le salaire quotidien du fils est inférieur de 8 Euros à celui du père.

b) Une personne veut partager 380 Euros entre un certain nombre d'individus. Six ne se présentent pas, de ce fait la part des autres est augmentée de 3.80 Euros. Combien d'individus devaient se présenter ?

Algorithmique

1.12 - - Ecrire un programme qui permet de donner les valeurs de α et β d'un polynôme du second degré. Ce programme devra prendre en paramètres les trois réels a, b et c.

1.13 - **- Corrigé -** Ecrire un algorithme permettant de trouver le nombre de solutions réelles d'un polynôme du second degré.

1.14 - - Ecrire un algorithme permettant d'obtenir la factorisation d'un polynôme du second degré.

1.15 - -Ecrire un algorithme permettant d'avoir la forme canonique d'un polynôme du second degré.

1.16 - -Un triplet Pythagoricien est un triplet (x ; y ; z) d'entier non nuls vérifiant la relation : $x^2 + y^2 = z^2$.

a) Ecrire un algorithme qui, pour chaque entier x de 1 à 100, teste si le résultat de la somme $x^2 + y^2$ est un carré et, si c'est le cas, affiche le triplet pythagoricien correspondant.

b) On remarquera que l'on obtient parfois des triplets équivalents, comme par exemple les triplets (3 ; 4 ; 5) et (4 ; 3 ; 5). Modifier la boucle de sorte à éviter ce problème.

Chapitre II : FONCTIONS NUMERIQUES

Parité-Périodicité, domaines de définition, représentations graphiques

2.1 - - **Corrigé-** Etudier la parité ou la périodicité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-4}$ d) $f(x) = \sqrt{5x-7}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2}}$ e) $f(x) = \dfrac{5x}{3|x|+2}$

c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x} - 3$ f) $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x + 3}$

2.2 - - Quels sont les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{7-2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{2x^2-4x+7}{6x^2-2x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-4x+12}}{5x-9}$

f) $f(x) = \sqrt{|2x^2-5x|+3} - \dfrac{5x^2-9x+3}{5x+1}$

2.3 - - Faire la représentation graphique des fonctions suivantes (on n'oubliera pas d'utiliser les propriétés de parité) :

a) $f(x) = 5x + 4$ d) $5|x-4| - 3|-5x+4| + x$

b) $f(x) = |x+2|$ e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|+1}}{x}$

c) $f(x) = 2x + |5x-9|$ f) $f(x) = \dfrac{5|x|}{x^2+4}$

2.4 - - Démonstration : Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \to x$; $x \to x^2$; $x \to \sqrt{x}$. Une figure est demandée.

Sens de variation

2.5 - - Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur R.

2.6 - - Justifier et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = x^2 - 5$

b) $f(x) = -(x+2)^2$ e) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

c) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ f) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

2.7 - - **Corrigé-** On considère la fonction f :

$f(x) = |2-x| - |x+1| - |-2x+1|$

a) En distinguant les valeurs de x, faire disparaître les valeurs absolues (on demande 4 intervalles et les expressions de f associées).

b) Etablir le tableau de variation de f.
c) Tracer la représentation de f.
d) Quels sont les minimums de f ?
ses maximums ?

2.8 - - Mêmes questions que l'exercice précédent avec : $f(x) = |x| - |3-x| - 2|x+1|$

Résoudre graphiquement, puis par le calcul :
$f(x) \geq 3$, et $f(x) = 1 - x$.

Opérations sur les fonctions

2.9 - - Donner l'ensemble de définition des fonctions u, v, u+v, u×v :

a) $u(x) = 4x - 8$ et $v(x) = x^2$
b) $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = 3x - 2$

c) $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 2x^2 + 5$

d) $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2$

e) $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

f) $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)^2$

2.10 - - Corrigé partiel - Réduire, ordonner et donner le degré des polynômes suivants :

a) $A(x) = (3x+1)^2 - 2x + 3x(x+2)^2 + 2(x-1)$

b) $B(x) = (x+1)(x^2 + 3x - 5)$

c) $C(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 2) + 3$

d) $D(x) = (x + 3)(x + 1)(x^2 - 3) + 2x - 3$

2.11 - -Soient u et v deux fonctions affines définies sur R d'équations : $u(x) = ax+b$ et $v(x) = a'x+b'$.

a) La somme u + v est-elle une fonction affine ?

b) Le produit $u \times v$ (x) est-il une fonction affine ?

2.12 - - Corrigé partiel - On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$.

Trouver deux réels a et b tels que

$f(x) = a + \frac{b}{x^2 - x + 1}$ et étudier la fonction f.

2.13 - - Soient les fonctions définies par :

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,$g(x) = -\frac{x}{2} + 1$, $h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$.

Montrez que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$: $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

2.14 - - Quelles sont les éventuelles asymptotes verticales pour chaque fonction ?

a) $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x+3}{x^2 + 4x - 5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x+1}$ d) $f(x) = x^2 + 8x$

Algorithmique

2.15 - - Corrigé Voici un algorithme :

a) Le tester pour les valeurs de x suivantes : 0, -1, 1, 3, 2,4 et 5.

b) Expliquer les réponses obtenues pour x = -1, x= 0 et x=1.

c) A partir de cet algorithme, exprimer y en fonction de x et donner l'ensemble de définition de x.

d) Déterminer le sens de variation de la fonction précédente.

```
VARIABLES
        x EST_DU_TYPE NOMBRE
        y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
        LIRE x
        AFFICHER « si x = »
        AFFICHER  x
        AFFICHER « alors »
        SI (X>1) ALORS
                DEBUT_SI
                Y PREND_LA_VALEUR 2/sqrt(x-1)
                AFFICHER « y= »
                AFFICHER y
                FIN_SI
        SINON
                DEBUT_SINON
                AFFICHER « impossible »
                FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

2.16 - - Voici un algorithme :

```
VARIABLES
        a EST_DU_TYPE NOMBRE
        b EST_DU_TYPE NOMBRE
        c EST_DU_TYPE NOMBRE
        d EST_DU_TYPE NOMBRE
        x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
        x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
        LIRE a
        AFFICHER a
        LIRE b
        AFFICHER b
        LIRE c
        AFFICHER c
        D PREND_LA_VALEUR pow(b,2)-4*a*c
        SI (d<=0) ALORS
                DEBUT_SI
                AFFICHER « |ax²+bx+c|=ax²+bx+c pour
                tout réel x»
                FIN_SI
                SINON
                        DEBUT_SINON
                        x1 PREND_LA_VALEUR (-b-
                        sqrt(d))/(2*a)
                        AFFICHER « x1= »
                        AFFICHER  x1
                        X2 PREND_LA_VALEUR (-b+
                        sqrt(d))/(2*a)
                        AFFICHER « x2= »
                        AFFICHER  x2
                        AFFICHER « |ax²+bx+c|=ax²-
                        bx-c pour tout réel x compris
                        entre x1 et x2 »
                        AFFICHER «sinon
                         |ax²+bx+c|=ax²+bx+c»

                FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

a) A quoi sert cet algorithme ? Quelle est la condition sur le réel a pour que le résultat soit correct ?

b) Que va afficher l'algorithme si on entre les valeurs : a=3 ; b=6 et c=-9 ?

c) compléter cet algorithme afin qu'il donne un résultat correct sans autre condition sur les réels a, b et c que $a \neq 0$.

2.17 - - Construire un algorithme permettant de calculer l'expression $y = |ax+b|$ avec a et b fixés et $a \neq 0$.

Chapitre III : DERIVATION ET APPLICATIONS

Nombre dérivé

3.1 - - **Corrigé partiel -** Déterminer le nombre dérivé (à l'aide d'une limite) de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2+1$ et $x_0 = 3$
b) $f(x) = 3x+1$ et $x_0 = 0$
c) $f(x) = x^2$ et $x_0 = 0$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $x_0 = 2$
e) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $x_0 = 2$
f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $x_0 = 0$

Calcul de la dérivée

3.2 - - Calculer les fonctions dérivées en précisant sur quels intervalles les fonctions sont dérivables.

a) $f(x) = x^2 +1$
b) $f(x) = 2x+-3$
c) $f(x) = 3x^4 -2x+1$
d) $f(x) = 3x^2 -x+7$
e) $f(x) = \sqrt{x+3}$
f) $f(x) = \frac{1}{x}$
g) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

3.3 - -Calculer f '(x) et donner les valeurs de x pour lesquelles f est dérivable :

$f(x) = \frac{3}{x+5} - 7\sqrt{x+3}$

3.4 - - **Corrigé -** Soit la fonction f d'équation : $f(x) = x^2$

a) Donner l'approximation affine locale de $(3 + h)^2$.
b) En déduire l'approximation du nombre suivant (sans donner l'erreur) : 3,002.

Tangente à la courbe

3.5 - - **Corrigé partiel -** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $x_0 = 4$
b) $f(x) = \frac{x-1}{2x}$ et $x_0 = 2$
c) $f(x) = x^3-2$ et $x_0 = 0$
d) $f(x) = \frac{2}{x^2-2}$ et $x_0 = 3$
e) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ et $x_0 = -2$
f) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $x_0 = 4$

3.6 - - $\mathcal{P}$ est la courbe d'équation $y = x^2$, $\mathcal{Q}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^2}$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont un point en commun A(1 ;1). Donner l'équation de la tangente en A de la courbe $\mathcal{P}$ et de la courbe $\mathcal{Q}$. Faire un dessin.

Sens de variation et extremums

3.7 - - Déterminer les dérivées des fonctions suivantes puis dresser leurs tableaux de variations:

a) $f(x) = 6(x^2-1)$
b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
c) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
d) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

3.8 - - **Corrigé** - Déterminer les extremums des fonctions suivantes sur l'intervalle I en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum :

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ sur $I = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ et sur $I = \mathbb{R}^{-*}$
c) $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$

Equation f(x)=0

3.9 - - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^4 + \frac{x^2}{2} - 5x$.

Etudier f et en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Etude de fonctions

3.10 - - **Corrigé partiel** - Etudier la fonction f suivante :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
c) $f(x) = \frac{2x+5}{x+4}$
d) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{2x+4}$
f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

3.11 - -Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{3x+1}{-x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative.

a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

b) Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que pour tout x de D : $f(x) = a + \dfrac{b}{-x+1}$.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de D et préciser les asymptotes.

d) Etudier les variations de f.

e) Représenter (C) et ses asymptotes.

3.12 - - Soit f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

a) Calculer f '(x). Quel est son signe ?

b) Déterminer les limites de f en -∞ et +∞.
Rassembler les résultats précédents dans un tableau.

c) Que représente la droite d'équation y=1 pour la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal ?

d) Montrer que C est symétrique par rapport à Oy, puis tracer C.

3.13 - - Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

1. Tracez sa représentation graphique C dans un repère orthonormé.
2. Soit D la droite d'équation y = m.

a) Ecrivez l'équation qui permet de trouver les abscisses des points d'intersection de D avec C.

b) Discutez suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de D avec C.

Chapitre IV : SUITES NUMERIQUES

Définition et calcul de termes d'une suite

4.1 - - Trouver la fonction f telle que pour tout n, u_n=f(n) et calculer les termes de u_0 à u_{10}.

a) $u_n = 3n + 6$

b) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n+3}$

c) $u_n = \cos(n\dfrac{\pi}{2})$

d) $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{2n+3}}$

e) $u_n = 2n^2 + 3\sqrt{n} + 1$

f) $u_n = \sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

4.2 - - Trouver f telle que pour tout n, u_{n+1}= f(u_n) et calculer les termes de u_0 à u_6.

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = (2\ u_n + 1)^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + 1 \end{cases}$

4.3 - - Donner la valeur exacte puis une valeur approchée des six premiers termes des suites suivantes. Donner ensuite le 70ème terme.

a) $u_n = 2^n+1$

b) $u_n = 3n^3 + n$

c) $u_n = \sqrt{n} - 3$

d) $u_n = \dfrac{5+n}{n}$

4.4 - - **Corrigé partiel -** Exprimer en fonction de n les termes u_{n-1}, u_{n+1}, u_{2n-2}, u_{2n+3} de la suite (u_n).

a) $u_n = 2n^2+1$

b) $u_n = \dfrac{n^2+2n+1}{2n+1}$

c) $u_n = 3 - 1^{\,n+2}$

d) $u_{n+2} = \dfrac{2n+3}{n+1}$

Sens de variation

4.5 - - Etudier le sens de variation de la suite (u_n) :

a) $u_n = (n-3)^2$

b) $u_n = 2n + 3$

c) $u_n = \sin(n\dfrac{\pi}{2})$

d) $u_n = \dfrac{2}{n}+1$

4.6 - -**Corrigé -** Etudier le sens de variation de la suite (u_n) :

a) $u_n = n + (-1)^n$

b) $u_n = \dfrac{3^n}{n}$

c) $u_n = 2n^3 + 20n^2 + 10n - 3$

d) $u_n = \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

Suites arithmétiques

4.7- - Soit une suite arithmétique u, de premier terme u_0 et de raison r. Calculer u_1, u_2 et u_n en fonction de n, puis calculer u_9 :

a) $u_0 = 1$; r = 2 .

b) $u_0 = 2$; $r = \dfrac{1}{3}$.

c) $u_0 = 3$; r = -2 .

a) $u_0 = -1$; $r = -\dfrac{1}{2}$.

4.8 - - **Corrigé** - (u_n) est la suite définie par u_0 =1 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$:

Calculer les cinq premiers termes.

a) Si $u_n \neq 0$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer les six premiers termes de la suite (v_n).

b) La suite (v_n) est-elle arithmétique ? En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

4.9 - - Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

a) Conjecturez graphiquement le comportement de la suite (u_n).
b) Prouvez que la suite (v_n) est arithmétique et donner son premier terme et sa raison.
c) Exprimez v_n, puis u_n en fonction de n.
d) Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Suites géométriques

4.10 - - Soit une suite géométrique u, de premier terme u_0 et de raison q. Calculer u_1, u_2 et u_n en fonction de n, puis calculer u_9 :

a) $u_0 = 2$; $q = 3$.
b) $u_0 = -1$; $q = 2$.
c) $u_0 = -3$; $q = -1$.
a) $u_0 = +3$; $q = 2$.

4.11 - - (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout naturel n, $w_{n+1} = 2\,w_n + 5$
a) Calculez les cinq premiers termes.
b) On pose $v_n = w_n + 5$. Calculez les cinq premiers termes de (v_n).
c) Prouvez que la suite (v_n) est géométrique et donnez (w_n) en fonction de n.

4.12 - - On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_n = \frac{u_{n-1} + 6n + 5}{2}$.

a) Calculez u_1 , u_2 et u_3 .
b) Pour tout n, on pose $v_n = u_n - 6n + 1$. Montrer que cette suite est géométrique et on déterminera le premier terme et la raison. Exprimer v_n en fonction de n.
c) On pose pour tout n : $w_n = u_n - v_n$. Montrer que w_n est une suite arithmétique.

Somme de termes consécutifs

4.13 - - Démontrer l'expression des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique.

4.14 - - Démontrer l'expression des n+1 premiers termes d'une suite géométrique.

4.15 - - (v_n) est une suite arithmétique. On a : $v_1 + v_2 + v_3 = 9$ et $v_{10} + v_{11} = 40$.
a) Calculer v_0 et la raison r.
b) Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{30}$

4.16 - - (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et $w_4 = 12$.
a) Calculer w_0.
b) Calculer la somme $S = w_0 + w_1 + \ldots + w_{30}$

4.17 - - **Corrigé partiel -** Calculer les sommes suivantes :

a) $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{1048576}$
b) $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots\ldots - \frac{1}{6561}$
c) $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\ldots + \frac{1}{10^7}$

4.18 - - Un adolescent lance une balle rebondissante au sol. Après le premier rebond, la balle atteint 10 m de hauteur.
a) Sachant qu'après chaque rebond la balle perd 30 % de hauteur, au bout de combien de rebonds le mouvement de celle-ci ne sera plus perceptible (- d'1 millimètre) ?
b) Sachant que l'adolescent a lancé sa balle à partir de 1,50 m, quelle distance la balle aura t'elle parcourue au total ?

Algorithmique

4.19 - - Voici deux algorithmes utilisant une fonction F:

```
❶VARIABLES
        U EST_DU_TYPE_LISTE
        I EST_DU_TYPE_NOMBRE
        N EST_DU_TYPE_NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
        LIRE N
        POUR I ALLANT_DE 0 A N-1
                DEBUT_POUR
                U[I] PREND LA VALEUR
        F[I]
                U[I+1] PREND LA VALEUR
        F[I+1]
                SI (U[I]> U[I+1]) ALORS
                        DEBUT_SI
                        AFFICHER « NON »
                FIN_SI
                SINON
                        DEBUT_SINON
                        AFFICHER « OUI »
                FIN_SINON
        FIN_POUR
FIN ALGORITHME
```

```
❷VARIABLES
        U EST_DU_TYPE_LISTE
        I EST_DU_TYPE_NOMBRE
        N EST_DU_TYPE_NOMBRE
        P EST_DU_TYPE_NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
        LIRE P
        U[0] PREND LA VALEUR P
        LIRE N
        POUR I ALLANT_DE 0 A N-1
                DEBUT_POUR
                U[I+1] PREND LA VALEUR
        F[U[I]]
                SI (U[I]> U[I+1]) ALORS
                        DEBUT_SI
                        AFFICHER « NON »
                FIN_SI
                SINON
                        DEBUT_SINON
                        AFFICHER « OUI »
                FIN_SINON
        FIN_POUR
FIN ALGORITHME
```

a) Décrire le rôle de chaque algorithme en précisant la signification des messages « oui » et « non ».

b) Que doit afficher algorithme pour que la suite soir croissante jusqu'au rang n ?

c) Tester l'un des deux algorithmes pour répondre aux questions suivantes :

1. Que peut- on dire de la suite de terme général $u_n = n^4 + 2n^3 - n + 5$ jusqu'au rang 10 ? 20 ? 30 ?

2. Que peut-on dire de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ jusqu'au rang 8 ? 16 ? 32 ?

3. Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n = n^8 / 2^n$ jusqu'au rang 8 ? 12 ? 16 ?

4.20 - - Sur un axe orienté $(O ; \vec{i})$, on considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : les abscisses des points A_0 et B_0 sont $a_0 = 2$ et $b_0 = 3$ et les abscisses des points A_n et B_n sont $a_n = \frac{2a_n+b_n}{3}$ et $b_n = \frac{a_n+2b_n}{3}$.

a) Placer les points A_0, B_0 A_1, B_1, A_2 et B_2.

b) On considère la suite $u_n = b_n - a_n$. Démontrer que u_n est une suite géométrique et exprimer u_n en fonction de n. Que peut-on dire du signe de u_n ? En donner une interprétation géométrique.

c) Démontrer au (a_n) est croissante et en donner une interprétation géométrique.

d) Démontrer que (b_n) est décroissante et en donner une interprétation géométrique.

e) On considère la suite $v_n = a_n + b_n$. Montrer que cette suite est constante.

f) Montrer que les segments $[A_nB_n]$ ont tous un même milieu que l'on déterminera.

g) Que peut-on conjecturer sur la limite des suites (a_n)et (b_n) ? En donner une interprétation géométrique.

h) Quel est le rôle de l'algorithme suivant pour cet exercice :

```
 VARIABLES
        A EST_DU_TYPE_LISTE
        B EST_DU_TYPE_LISTE
        I EST_DU_TYPE_NOMBRE
        p EST_DU_TYPE_NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
        A[0] PREND LA VALEUR 2
        B[0] PREND LA VALEUR 3
        I PREND LA VALEUR 0
        LIRE p
        TANTQUE (B[I]-A[I]>p) EXECUTER
                DEBUT_TANTQUE
                A[I+1] PREND LA VALEUR
        (2*A[I]+B[I])/3
                B[I+1] PREND LA VALEUR
        (A[I]+2*B[I])/3
                I PREND LA VALEUR I+1
        FIN TANTQUE
        AFFICHER « l'entier recherché est »
        AFFICHER I
FIN ALGORITHME
```

4.21 - - Soit une suite u définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = -0,5\ u_n + 5$.

a) On souhaite obtenir u_n pour n'importe quelle valeur de n. Choisir parmi les trois algorithmes proposé celui ou ceux qui correspond(ent) :

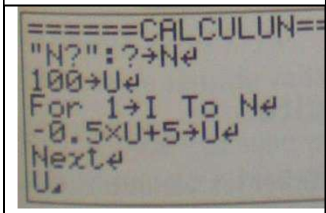
```
❶VARIABLES
        N EST_DU_TYPE_ENTIER
        I EST_DU_TYPE_ENTIER
        U EST_DU_TYPE_REEL
DEBUT ALGORITHME
        U PREND LA VALEUR 100
        LIRE N
        POUR I ALLANT DE 1 A N
EXECUTER
                U=-0,5*U + 5 ;
        FIN POUR
        AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

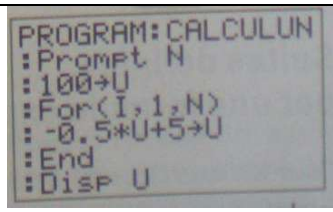
❷VARIABLES
N EST_DU_TYPE_ENTIER
I EST_DU_TYPE_ENTIER
U EST_DU_TYPE_REEL
DEBUT ALGORITHME
U = 100 ;
I = 0 ;
LIRE N
TANTQUE I<=N
EXECUTER
I=I+1 ;
U=-0,5*U + 5 ;
FIN TANTQUE
AFFICHER U
FIN ALGORITHME

❸VARIABLES
N EST_DU_TYPE_ENTIER
I EST_DU_TYPE_ENTIER
U EST_DU_TYPE_REEL
DEBUT ALGORITHME
U = 100 ;
I = 0 ;
LIRE N
TANTQUE I<N EXECUTER
I=I+1 ;
U=-0,5*U + 5 ;
FIN TANTQUE
AFFICHER U
FIN ALGORITHME

a) Modifier le(s) algorithme(s) choisi(s) afin d'obtenir tous les termes de la suite de rang inférieur à un entier n donné.
b) Voici la traduction de l'algorithme ❶ en langage calculatrice :

CASIO	TI





Programmer la calculatrice et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{10}, u_{20}, u_{100}.
c) Pour chacune des suites suivantes, écrire un algorithme permettant de calculer u_n pour n'importe quel entier n, programmer la calculatrice et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50}.

1. $_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
2. $_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} - 2$

Chapitre V : STATISTIQUES

Statistiques : Moyenne, variance et écart-type

5.1 - - Etudier les séries statistiques suivantes :
a) *Série 1 :*

x_i	1	2	4	5	6	8	10
n_i	5	7	10	13	18	12	6

Tracer le diagramme en bâtons de la série.
Calculer les effectifs cumulés croissants.
Tracer le diagramme des effectifs cumulés croissants.

b) *Série 2 :*

Classes	[0 ;2[	[2 ;4[	[4 ;6[	[6 ;8[	[8 ;10[	[10 ;12[
Effectifs	10	5	13	3	10	15

Tracer l'histogramme de la série.
Calculer les fréquences cumulées croissantes.
Tracer le diagramme des fréquences cumulées croissantes.

5.2 - - **Corrigé -** Deux élèves obtiennent les notes suivantes à leurs contrôles de mathématiques au cours d'une année scolaire. Calculer dans chaque cas : la moyenne, la variance et l'écart-type. Quel est l'élève qui est le plus régulier ?
a) *Notes de l'élève 1 : 5 8 12 9 10 15 7 12 10*
b) *Notes de l'élève 2 : 6 9 10 11 14 12 8 13 9*

5.3 - - Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm. On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication. Les mesures des diamètres correspondants ont donné les résultats suivants :

Classe	]24 ; 24,2]	]24,2 ; 24,4]	]24,4 ; 24,6]
Effectif	0	5	13

]24,6 ; 24,8]	]24,8 ; 25]	]25 ; 25,2]	]25,2 ; 25,4]
24	19	14	10

]25,4 ; 25,6]	]25,6 ; 25,8]	]25,8 ; 26]
8	5	2

a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
b) La production de la machine est jugée bonne si la série de mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

- la moyenne est dans l'intervalle [24,9 ; 25,1].
- l'écart-type est strictement inférieur à 0,3.
- 90 % de l'effectif figure dans l'intervalle $\left[\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma\right]$

La production est-elle bonne ?

Statistiques : Quartiles, diagramme en boîte et changements affines

5.4 - - Corrigé - Pour la série statistique suivante, déterminer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile : 10 – 18 – 8 – 4 – 2 – 23 – 18 – 9 – 1 – 33 – 27 – 30 .

5.5 - - Donner une série de 20 valeurs telle que le premier quartile soit 5, la médiane 15 et le troisième quartile 35.

5.6 - - Construire les diagrammes en boîte suivants :
a) *Série 1 :* Min = 4,3 ; Q1 = 5,6 ; Me = 8,3 ; Q3 = 11,2 ; Max = 16.
b) *Série 1 :* Min = 5,7 ; Q1 = 8,5 ; Me = 12,2 ; Q3 = 15,8 ; Max = 19,7.

5.7 - - Une association possède une ligne d'écoute téléphonique destinée à des personnes en difficulté. Deux écoutants décident de voir le temps passé au téléphone (en minutes) sur une sélection de 100 appels consécutifs. Les appels ne dépassent jamais 10 minutes.

Durée	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Ecoutant 1	5	18	10	8	15
Ecoutant 2	2	10	8	15	12

a) Tracer le polygone des fréquences croissantes et estimer graphiquement les valeurs du premier quartile, de la médiane et du troisième quartile.
b) Calculer le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.
c) Tracer les diagrammes en boîte.

5.8 - - Dans une boulangerie, on mesure le temps d'attente avant d'être servi par la boulangère ou par une de ses apprenties. Les mesures suivantes ont été effectuées un dimanche entre 9h et 12h (jour de référence).

Temps d'attente	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ;8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Nombre de clients	150	213	108	56	30	8

a) Déterminer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart-type σ de la série.

b) Un jour de grève des transports, la moitié du personnel n'est pas là et le temps d'attente est augmenté de 2 minutes par rapport au jour de référence. Que deviennent $\bar{x}$, la variance V et l'écart-type σ de la série ?
c) Calculer le premier quartile Q_1, la médiane M_e et le troisième quartile Q_3.
d) Une autre journée, le temps d'attente est multiplié par deux par rapport au jour de référence. Que deviennent le premier quartile Q_1, la médiane M_e et le troisième quartile Q_3.

Algorithmique

5.9 - - On dispose d'une série de 500 valeurs dont on connait la moyenne. Soit l'algorithme :

```
Variables : I, N : entiers
            X, S, C : réels
Début
        Afficher « nombre de valeurs ? »
        Entrer N
        S prend la valeur 0
        C prend la valeur 0
        Pour I allant de 1 à N exécuter
                Entrer X
                S = S + X ;
                C = C + X*X
        FinPour ;
Fin
```

a) Que contiennent les variables S et C à la fin de la boucle ?
b) Compléter cet algorithme afin d'obtenir la moyenne et l'écart type de la série de valeurs.

Chapitre VI : PROBABILITES

Probabilités, fréquences, ensembles

6.1 - -Sur 1000 lancers, on a dénombré 119 fois l'évènement P_3, 390 fois P_2, 370 fois P_1 et 121 fois P_0 .

a) Calculer les fréquences de chaque évènement P_i.
b) Faire la somme de toutes ces fréquences.

6.2 - - **Corrigé** - On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) un carreau
b) un valet
c) un valet de carreau

6.3 - - On lance une pièce trois fois de suite. On note P_i l'évènement « avoir i fois le côté pile ». Obtenir le côté Pile est noté « P » et obtenir le côté face est noté « F ».
a) Quel est Ω l'ensemble des possibles de cette expérience ? Dessiner l'arbre correspondant.
b) Donner les issues de l'évènement P_3 et donner son complémentaire.
c) Donner toutes les issues possibles pour les évènements : P_0, P_1, P_2.
d) Ecrire l'évènement A « obtenir au moins deux fois face » à l'aide des P_i.
e) Ecrire l'évènement B « obtenir au plus une fois face » à l'aide des P_i.
f) Trouver $A \bigcup B$ et $A \bigcap B$.

6.4 - Une loterie édite 1 000 000 de billets numérotés de 0 à 999 999.
a) Quelle est la probabilité pour qu'un billet pris au hasard porte un numéro composé de six chiffres identiques ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'un billet pris au hasard porte un numéro composé de six chiffres tous différents entre eux ?

6.5 - - E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard un de ces nombres.

a) Quel est la probabilité d'obtenir les évènements suivants :
- A : « il est multiple de 2 »
- B : « il est multiple de 4 »
- C : « il est multiple de 5 »
- D : « il est multiple de 2 mais pas de 4 »
- F : « il est multiple de 4 mais pas de 2 »

b) Calculer la probabilité de :
$A \cap B, A \cup B, A \cap C$ *et* $A \bigcup C$.

Probabilités : Variable aléatoire, espérance, variance et écart-type

6.6 - - La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie de la façon suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0.1	0.13	0.26	0.34	0.06	0.11

a) Calculer $\sum_{i=1}^{i=6} P(X = x_i)$.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart-type σ(X).

6.7 - - **Corrigé -** Une urne contient 9 boules rouges, 6 boules vertes, 3 boules jaunes et 1 boule bleue. On tire au hasard une boule dans l'urne. Tirer une boule rouge fait perdre 1 Euro, tirer une boule verte rapporte 1 Euro, une boule jaune 2 Euros et une boule bleue 4 Euros.
Soit X la variable aléatoire associée au gain obtenu lors du tirage d'une boule dans l'urne.
a) Donner les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer E(X). Qu'en concluez-vous ?

6.8 - - Un joueur lance deux dés équilibrés. Il mise 1 euro sur l'apparition d'un 4. Si le numéro 4 apparaît sur un dé il gagne 5 euros, s'il apparaît sur les deux dés il gagne 10 euros. Si le 4 n'apparaît pas, il perd sa mise.
Soit la variable aléatoire X associée au gain diminué de sa mise.
a) Donner les valeurs de X.
b) Exprimer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.
c) Calculer E(X). Qu'en concluez-vous ?
d)Calculer la variance V(X) et l'écart-type σ(X).

6.9 - - On lance simultanément deux dés sur une table. L'un est cubique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'autre est tétraédrique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. On suppose que chacune des faces de chaque dé a la même probabilité d'apparition. On désigne par Y la variable aléatoire correspondant à la valeur absolue de la différence des nombres sur les deux faces en contact avec la table.
a) Compléter le tableau suivant correspondant aux valeurs prises par Y en fonction des valeurs prises par les deux faces en contact avec la table.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0					
2				2		
3		1				
4					1	

b) Donner la loi de probabilité de Y.
c) Calculer E(Y), V(Y) et σ(Y).

Chapitre VII : LOI BINOMIALE

Répétition d'expériences aléatoires

7.1 - **-** Indiquer pour chaque proposition si les expériences aléatoires sont indépendantes.
a) On lance deux fois de suite un dé non truqué.
b) Dans une urne contenant 5 boules noires et 5 boules rouges, on tire une boule puis en en tire une seconde.
c) On tire une carte d'un jeu de 54 cartes, on la remet dans le paquet puis on en tire une autre.
d) On tourne une roue comportant 10 cases de 10 couleurs différentes, on note la couleur, puis on tourne la roue de nouveau.
e) on désigne au élève au hasard dans une classe, puis en en désigne un autre.
f) On tire deux cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes, on les remet dans le jeu, et on en tire deux autres.

7.2 - **- Corrigé -** Une urne contient 5 boules noires et 10 boules jaunes. On effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise.

a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.

b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

c) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

d) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

7.3 - **-** A la fête foraine, un forain propose de tourner la « roue magique ». La probabilité de tomber sur une case « 1 point » est égale à $\frac{2}{5}$ et la probabilité de tomber sur une case « 2 points » est égale à $\frac{1}{6}$. Toutes les autres cases sont perdantes.

a) On joue deux parties. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issus de deux partie. Déterminer la loi de probabilité de X.

7.4 - **-**Lors de la session 2010, la répartition des candidats au baccalauréat générale était la suivante : 51% en S, 32% en ES et 17% en L. On a interrogé un candidat au hasard après l'épreuve de philosophie (qui s'est déroulée en même temps pour les trois filières).
On interroge ensuite deux autres candidats. Comme le nombre de candidats interrogés est très faible devant le nombre total de candidats du lycée, on considère le choix des candidats indépendants les uns des autres. Construire un arbre pondéré schématisant la situation.

7.5 - **-**Un jeu de cartes comporte 108 cartes. 76 cartes sont chiffrées (de 0 à 9), 24 sont des cartes « action » et 8 sont des cartes Joker.
a) on pioche successivement, avec remise deux cartes du jeu. On note le résultat (chiffre, action ou joker). Représenter les deux tirages à l'aide d'un arbre pondéré.
b) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de cartes joker obtenues. Calculer P(X=2), P(X=1) et P(X=0).

Epreuve et schéma de Bernoulli

7.6 - **-** Indiquer si ces épreuves correspondent à des épreuves de Bernoulli.
a) On lance un dé cubique, on note le chiffre obtenu.
b) On lance un dé cubique, on note si le chiffre obtenu est pair ou impair.
c) On lance un dé cubique, on note si le chiffre obtenu est 6 ou pas.
d) On lance un dé cubique, on note si le chiffre obtenu est un multiple de 3 ou pas.
e) On lance une pièce de monnaie, on note le résultat obtenu.
f) On tire une boule dans une urne contenant des boules noires, jaunes et rouges. On note la couleur obtenue.
g) On tire une boule dans une urne contenant des boules noires et des boules jaunes. On note la couleur obtenue.

7.7 - **- Corrigé -** Lors d'une compétions régionale de basket on remarque que, 85% des joueurs arrivent à toucher le panier. Une marque de sport effectue un sondage sur 50 joueurs choisis aléatoirement pour étudier le lien entre la marque des chaussures des joueurs et leurs performances au saut. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui arrivent à toucher le panier. Justifier que cet énoncé correspond au modèle binomial.

7.8 - **-** Un vaccin a été testé sur un échantillon de 100 personnes. On remarque qu'il a été efficace pour 88% d'entre elles. On effectue chaque jour des analyses sur deux personnes, on considère que le tirage est avec remise. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de patient sain.
Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

7.9 - **-** L'entraineur d'une équipe de football observe ses joueurs pendant l'entrainement. Lors d'une série de 5 tirs au but, en prenant un joueur au hasard, il note les probabilités suivantes :
- la probabilité de marquer 1 but est 0,3 ;
- la probabilité de marquer 2 but est 0,3 ;
- la probabilité de marquer 3 buts est 0,2 ;
- la probabilité de marquer 4 but est 0,15 ;
- la probabilité de marquer 5 buts est 0,05 ;

1) L'entraineur demande à ses joueurs d'effectuer deux séries de 5 buts, on suppose que la performance du joueur lors de la deuxième série est indépendante de sa performance lors de la première série.

a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b) On choisit un joueur au hasard, calculer les probabilités suivantes :
- le joueur a marqué 3 buts à la première série et 2 à la seconde ;
- le joueur n'a marqué aucun but sur les deux séries ;
- le joueur a marqué 5 buts à la première série et 4 à la seconde ;
- le joueur a marqué 2 buts au total pour les deux séries.

2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de but total, à l'issue des deux séries.

a) Justifier que P(X=10) = $0,2^2$ et P(X=7) = 0,28.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer la probabilité que le joueur marque au moins 4 but sur les deux séries.

d) Calculer E(X) et interpréter le résultat.

Loi binomiale

7.10 - - VRAI OU FAUX

a) Dans un schéma de k épreuves de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès.

b) Le coefficient $\binom{n}{n+1}$ n'existe pas.

c) On a les égalités suivantes : $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = \binom{3}{0}$

d) On a l'égalité suivante : $\binom{n+1}{1} = \binom{n}{1} + 1$

7.11 - - Quizz

a) X est une variable aléatoire suivant la loi Binomiale B(5 ; 0,5). Calculer P(X=2).

b) X est une variable aléatoire suivant la loi Binomiale B(n ; p). Exprimer, en fonction de n et p, P(X=k).

c) X est une variable aléatoire suivant la loi Binomiale B(50 ; 0,2). Calculer son espérance et sa variance.

7.12 - **- Corrigé partiel -** Un enfant tape 100 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre fois où l'enfant a tapé sur la lettre « a ».

a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

b) Calculer et interpréter : P(X=15) ; P(X≤15) ; E(X)

7.13 - **-** X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres B(40 ; 0,9).

a) Calculer P(X=k) et P(X≤k) pour 0 ≤ k ≤ 40

b) Tracer la représentation graphique de X.

7.14 - **-** On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli représenté par un arbre et k un entier compris entre 0 et n. L'entier $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemin de l'arbre réalisant k succès. Démontrer que pour k compris entre 0et 10, on a : $\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$.

7.15 - **-** A l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{8}{k}$ ou k compris entre 0 et 8.

Echantillonnage

7.16 - **-** Voici l'extrait d'une feuille de calcul concernant une variable aléatoire X suivant une loi binomiale B (80 ; 0,3).

k	P(X<=k)	k	P(X<=k)
0	4,05362E-13	16	0,03021952
1	1,43035E-11	17	0,05305763
2	2,49579E-10	18	0,08731479
3	2,87122E-09	19	0,13522331
4	2,44998E-08	20	0,19784658
5	1,65394E-07	21	0,27452813
6	9,20186E-07	22	0,36266213
7	4,33986E-06	23	0,45791254
8	1,77132E-05	24	0,55486385
9	6,35647E-05	25	0,6479371
10	0,000203084	26	0,7323167
11	0,000583592	27	0,80464207
12	0,001521272	28	0,86331418
13	0,003623324	29	0,90840211
14	0,007934675	30	0,94125189
15	0,016064651	31	0,96395911

a) Déterminer k1 et k2

b) En déduire l'intervalle de fluctuation à 95% de la variable aléatoire X.

c)Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. Sur les 30 personnes ayant joué, 5 ont tiré une boule blanche et ont donc gagné. Le résultat de la question précédente permet-il de soupçonner une triche ?

7.17 - Corrigé -- **-** Une machine produit 10 000 pièces par jour. Lorsque la machine fonctionne normalement, la probabilité qu'une

pièce soit défectueuse est p=0,01. On considère que les défauts sont indépendants les uns des autres.
a) Justifier que le nombre de pièces défectueuses suit une loi binomiale et préciser les paramètres.
b) Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% (à l'aide d'un tableur)
c) On observe 150 boulons défectueux sur les 10 000 produits. Que peut-on en conclure ?

7.18 - **-** Lors d'un sondage, 100 personnes ont répondu à la question : « aimez-vous le beurre salé ? », les deux réponses possibles étant oui et non. On note que 66% des personnes ont répondu non. Voici trois propositions :
1- 55% des personnes aiment le beurre salé
2- 70% des personnes aiment le beurre salé
3- 45% des personnes aiment le beurre salé
Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% de chacune de ces propositions (à l'aide d'un tableur) puis déterminer quelle(s) proposition(s) peuvent être acceptée(s).

7.19 - **-** Un lycée a acheté un distributeur de boisson. Le vendeur a affirmé que la probabilité que la machine tombe en panne est égale à 0,02.
Au cours de la première année, la machine est tombée en panne 13 fois. On cherche à savoir si la probabilité annoncée par le vendeur est vérifiée.
a) Le nombre de panne est assimilé à la variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}$ (365 ; 0,02). Voici un extrait d'une feuille de tableur concernant cette variable X :

k	P(X<=k)
0	0,00062736
1	0,00530056
2	0,02265816
3	0,06552081
4	0,1446855
5	0,26133225
6	0,404165
7	0,5536605
8	0,69018955
9	0,80071308
10	0,8810118
11	0,93389871
12	0,96573879
13	0,98338329
14	0,99243703
15	0,99676065
16	0,99869084
17	0,99949953
18	0,9998186

Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%. Peut-on rejeter l'hypothèse du vendeur ?
b) On décide cette fois de déterminer le plus petit entier k3 tel que P(X $\leq$ k3) $\geq$ 0,95, et de prendre comme intervalle de fluctuation l'intervalle [0 ; $\frac{k3}{365}$]. Peut-on cette fois ci rejeter l'hypothèse du constructeur ?
c) Pourquoi a-t-on privilégié un intervalle non symétrique ?

7.20 - Corrigé **-** On considère un dé tétraédrique numéroté de 1 à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois ou le résultat « 2 » est obtenu, au bout de 6 lancers. Ecrire un algorithme donnant la loi de probabilité de X.

7.21 - **-** Elodie et Nicolas, deux joueurs d'échec, s'affrontent depuis plusieurs années.
Elodie, qui a noté l'intégralité des scores dans un carnet, remarque qu'elle gagne dans 62% des cas.
On considère l'expérience composée de quatre parties d'échec successives et indépendantes. On note X le nombre de partie remportées par Elodie.
Ecrire un algorithme donnant la loi de probabilité de X.

Algorithmique

7.22 - **-** Voici un algorithme :

```
Pour i allant de 1 à 2 exécuter
        a[i] = alea() ;
        Si a[i] < 0,5 alors
                = 1 ;
                Sinon si a[i] > 0,8 alors
                        b[i] = 5 ;
                FinSi
        FinSi
FinPour
Pour i allant de 1 à 2 exécuter
        Afficher b[i] ;
FinPour
```

Décrire une expérience aléatoire pouvant être simulée par cet algorithme.

7.23 - **-** Le jeu « la boule » au casino permet de miser sur un nombre compris entre 1 et 9.
a) On mise 5 fois de suite sur le numéro 8. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées. Ecrire un algorithme simulant la variable X.
b) Modifier cet algorithme afin de pouvoir répéter n fois 5 parties et de pouvoir compléter ce tableau :

X	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Fréquence						

c) Modifier cet algorithme pour qu'il permette de simuler 7 parties successives. Les chances de gagner au moins une partie sont-elle doublées ?

**7.24 - - ** Il y a 36 élèves dans une classe, un tiers sont des filles. Le professeur de mathématiques interroge un élève au hasard à chaque début de cours.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées au bout de n cours de mathématiques consécutifs.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité que 3 filles soient interrogées si l'expérience est effectuée sur 5 cours.

c) Calculer la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée sur 10 cours.

d) Voici un algorithme, le tester et le mettre en rapport avec l'énoncé.

```
DEBUT_ALGORITHME
        n PREND_LA_VALEUR 0
        TANT_QUE (pow(1/3),n)>0,001 FAIRE
                DEBUT_TANT_QUE
                n PREND_LA_VALEUR n+1
                FIN_TANT_QUE
        AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

e) Sachant qu'il y a 120 cours de mathématiques sur l'année scolaire, quel est en moyenne, le nombre cours où une fille est interrogée ?

**7.25 - - ** Voici un algorithme écrit avec le logiciel Algobox. Il permet de calculer les (n+1) coefficient binomiaux : $\binom{n}{0}$; $\binom{n}{1}$; $\binom{n}{2}$ ….. $\binom{n}{n}$ pour n $\geq$ 3.

```
DEBUT_ALGORITHME
        Lire n
        B[0] PREND_LA_VALEUR 1
        B[1] PREND_LA_VALEUR 2
        B[2] PREND_LA_VALEUR 1
        POUR i ALLANT_DE 3 A n
                DEBUT_POUR
                A[0] PREND_LA_VALEUR 1
                POUR j ALLANT_DE 0 A i-2
                        DEBUT_POUR
                        A[j+1] PREND_LA_VALEUR
                B[j]+B[j+1]
                        FIN_POUR
                A[i] PREND_LA_VALEUR 1
                POUR j ALLANT_DE 0 A i
                        DEBUT_POUR
                        B[j] PREND_LA_VALEUR A[j]
                        FIN_POUR
                FIN_POUR
        POUR i ALLANT_DE 0 A n
                DEBUT_POUR
                AFFICHER A[i]
```

b) Donner le rôle des listes A et B. Est-il nécessaire de mémoriser toutes les données du triangle ?

c) A quoi correspondent les lignes 2 à 4 ?

d) A quelle ligne utilise-t-on la propriété $\binom{n}{0}$ = 1 ? $\binom{n}{n}$ = 1 ?

e) Rédiger un algorithme en langage naturel.

7.26 - -D'après un sujet de bac (Amérique du Sud, nov.2009)

Une urne contient deux billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher. Une partie consiste pour un joueur à effectuer deux tirages successifs avec remise d'une bille dans l'urne. A la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes, il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon, il ne gagne rien.

a) Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est p = 0,04.

b) Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

c) 20 personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité, à 10^{-3} près, que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.Justifier.

d) On appelle n le nombre de personne participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois. On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3. Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geq 0{,}99$. Faire une phrase traduisant le résultat obtenu.

Chapitre VIII : GEOMETRIE PLANE

Calcul vectoriel

8.1 - - Corrigé - Soient A, B, C et D quatre points du plan. E et F les milieux respectifs de [AC] et [BD].

a) Exprimer $\vec{AB}+\vec{CD}$ en fonction de $\vec{EF}$.

b) Exprimer $\vec{BC}+\vec{DA}$ en fonction de $\vec{FE}$.

c) Soit $\vec{u} = x(\vec{AB}+\vec{CD}) + y(\vec{BC}+\vec{DA})$ où x et y sont deux nombres réels. A quelle condition a-t-on $\vec{u} = \vec{0}$?

8.2 - - Soit un trapèze

ABCD de bases [AB] et [CD]. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en I. . On projette I sur (AB) parallèlement à (AD) en A', puis parallèlement à (BC) en B'.

a) Montrer que :

Si $\vec{CI} = k.\ \vec{CA}$ = alors $\vec{DI} = k.\ \vec{DB}$

b) Démontrer que :

$\vec{AA'} = k.\ \vec{AB}$ et $\vec{BB'} = k.\ \vec{BA}$

En déduire que [AB] et [A'B'] ont même milieu.

8.3 - - Soit ABCD un trapèze convexe où (AB) est parallèle à (CD). Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Soit I le milieu de [AB], et J le milieu de [CD]. Montrez que les points F, I, E, J sont alignés.

8.4 - - On considère un triangle ABC quelconque.

a) Placer les point D et E tels que :

$\vec{AD} = 2\ \vec{AB} + \vec{AC}$ et $\vec{BE} = \frac{1}{3}\ \vec{BC}$

b) Démontrer que les points A, D et E sont alignés en utilisant le calcul vectoriel puis en choisissant un repère du plan.

Vecteurs colinéaires

8.5 - - Existe-t-il des valeurs de k (k réel) telles que $\vec{u}$ (k-1 ; 2) et $\vec{v}$ (12 ; k+1) soient colinéaires ?

8.6 - - Corrigé - ABCD est un parallélogramme. I et J sont deux points tel que : $\vec{AI} = \vec{CJ} = \vec{BD}$. Démontrer que [AJ] et [CI] ont le même milieu.

8.7 - - A, B et C sont trois points non alignés du plan. Démontrer que, pour tout point M du plan, la somme $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ est égale à un vecteur indépendant du point M. Une figure est attendue.

8.8 - - ABC est un triangle. Soit M un point du plan tel que $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 3\vec{MC}$. Démontrer que les droites (AM) et (BC) sont parallèles.

Equations cartésiennes

8.9 - - Corrigé partiel - Le plan est rapporté au repère (O, I , J). On considère les points A(-2 ; 6), B(0 ; 4) et le vecteur $\vec{u}$ (1 ; -3). Déterminer une équation cartésienne des droites suivantes :

a) la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{u}$.

c) la parallèle à l'axe des ordonnées passant par A.

c) la parallèle à l'axe des abscisses passant par B.

d) la droite (AB).

8.10 - - On considère la droite d d'équation cartésienne (a – 2) x +2y + 5 = 0 avec a réel. Déterminer le réel a pour que d passe par le point A(-3 ; 1) puis donner le vecteur directeur de d.

8.11 - - Le plan est rapporté au repère (O, I , J). On considère les points A(-1 ; 1), B(3 ; 4) et C (3 ; 1).

a) Placer les points dans un repère.

b) Déterminer une équation cartésienne des droites (AB), (BC) et (AC).

c) E milieu de [AB] et F milieu de [BC]. Déterminer une équation cartésienne de (EF).

8.12 - - Corrigé - Le plan est rapporté au repère (O, I , J). On considère les points A(0 ; 1), B(1,5 ; 2), C (5,5 ; 3) et D(1 ;0)

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

8.13 - - Le plan est rapporté au repère (O, I , J). On considère les points A(1 ; -1), B(-2 ; 3), C (5 ; -6) et D(1297 ;-1729)

Les points A, B, C et D sont-ils alignés ?

8.14 - - Le plan est rapporté au repère (O, I , J). On considère les points A(-1 ; 2), B(1 ; 3) et C (195 ; 100).

a) Placer les points dans un repère.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

c) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

d) on considère la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
d est-elle parallèle à (AB) ?
e) d' est la droite passant par C et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$. B appartient-il à d' ?

8.15 - - On considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équation :
$d_1 : x + 2y - 1 = 0$
$d_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
$d_3 : -2x + 3y + 5 = 0$
a) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Si non, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
b) même question pour les droites d_1 et d_3, puis d_3 et d_2.

Algorithmique

8.16 - - Ecrire un algorithme qui, après saisie des coordonnées de 3 points, détermine s'ils sont alignés.

8.17 - - **Corrigé -** Voici un algorithme :

```
Lire (a, b et c) ;
Lire (a', b' et c') ;
x= (b'c-bc')/(b'a-ba') ;
y= (a'c-ac')/(b'a-ba') ;
Afficher (x)
Afficher (y)
```

a) Que fait cet algorithme ?
b) Dans quel cas cet algorithme ne peut-il pas fonctionner ? Le modifier afin qu'il fonctionne dans tous les cas.

8.18 - - Le but de cet exercice est d'écrire un algorithme donnant les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de deux droites d_1 et d_2.
$d_1 : ax+by+c=0$ $\quad$ $d_2 : dx+ey+f=0$
avec $(a;b) \neq (0,0)$ et $(d;e) \neq (0,0)$
a) Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes si et seulement si $a \times e - b \times d \neq 0$
b) On suppose que $a \times e - b \times d \neq 0$, on note M(x ;y) le point d'intersection de d_1 et d_2.
Justifier que $(a \times e - b \times d)x = - c \times e + b \times f$
c) Exprimer x et y en fonction de a, b, c, d, e et f
d) Ecrire un algorithme qui prend les valeurs des réels a, b, c, d, e et f en entrée, et qui affiche « les droites d1 et d2 sont (ne sont pas) sécantes » et si oui, « leur point d'intersection a pour coordonnées … »

Chapitre IX : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

Calculs avec sin et cos

9.1 - - **Corrigé** - Montrer que quel que soit le réel x :
a) $(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2 = 2$
b) $\sin^4(x) + \cos^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1$
c) $\sin^4(x) - \cos^4(x) + 2\cos^2(x) = 1$

9.2 - - Exprimer en fonction de sin(a) et cos(a) les expressions suivantes :
a) $\cos(\frac{\pi}{2} + a) + \cos(2\pi - a) + \sin(\pi - a) + \cos(\pi + a)$
b) $\cos(-a) + \sin(-a) + \cos(\pi - a) + \sin(\pi - a)$
c) $\sin(\frac{\pi}{2} + a) + \cos(\pi - a) + \sin(a + \frac{3\pi}{2}) + \cos(a + \pi) - \sin(\frac{5\pi}{2} - a)$

9.3 - - Exprimer en fonction de cos(x) et sin(x) les expressions suivantes :
a) $\cos(x + \frac{3\pi}{2}) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$
b) $\cos x . \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) . \sin x$
c) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \pi) + \cos(x + \frac{3\pi}{2}) + \cos x$
d) $\sin(x + \frac{5\pi}{2}) + \sin(x - \frac{3\pi}{2})$

9.4 - - On définit un réel x par :
$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
a) Calculer cos(2x) et sin(2x).
b) Vérifier que cos(4x) = sin(x). En déduire x.

Cercle trigonométrique

9.5 - - Dessiner sur un cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F tels que :
a) $(\vec{i}, \vec{OD}) = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ d) $(\vec{i}, \vec{OA}) = -\frac{\pi}{6}$
b) $(\vec{i}, \vec{OE}) = -\frac{\pi}{8}$ $\quad$ e) $(\vec{i}, \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

c) $(\vec{i}, \vec{OF}) = \frac{2\pi}{3}$ f) $(\vec{i}, \vec{OC}) = -\frac{3\pi}{12}$

9.6 - - Corrigé - Soit un point M placé sur un cercle trigonométrique tel que :
$(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta$. Simplifiez les expressions suivantes avec des considérations géométriques que vous expliquerez sur un dessin.

a) $A = \cos(\theta - \pi) - \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sin(\theta - \pi)$

b) $B = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \sin(\pi + \theta) - \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) - \sin(\theta + 3\frac{\pi}{2})$

Angles orientés

9.7 - -(ABCD) est un losange tel que :

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{5}$

Trouver les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\vec{AB}, \vec{AD})$ c) $(\vec{AD}, \vec{DC})$

b) $(\vec{AB}, \vec{CD})$ d) $(\vec{CA}, \vec{CB})$

9.8 - - (ABCDEFGH) est un octogone de centre O.
Trouver les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\vec{OB}, \vec{OD})$ d) $(\vec{OD}, \vec{OC})$

b) $(\vec{OB}, \vec{OG})$ e) $(\vec{HA}, \vec{DE})$

c) $(\vec{OE}, \vec{OC})$ f) $(\vec{CD}, \vec{OH})$

9.9 - - Soit trois points A, B et C tels que :
$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{5\pi}{3}$.

a) Tracer le triangle ABC.
b) Donner la nature du triangle ABC.

9.10 - - Corrigé - Soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{3}$.

Calculer les mesures des angles orientés suivants :

a) $(\vec{u}, -\vec{v})$ d) $(2\vec{w}, -\vec{v})$

b) $(\vec{w}, \vec{v})$ e) $(5\vec{v}, -\vec{v})$

c) $(-3\vec{u}, \vec{v})$ f) $(\vec{u}, -\vec{w})$

Coordonnées polaires

9.11 - - Soit $(0, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soient les points M de coordonnées polaires (r, θ) tels que : $r = 5$ et $\theta \in [0; \pi]$. Quelle figure géométrique représente l'ensemble des points M ?

9.12 - - Donner les coordonnées cartésiennes des points de coordonnés polaires suivants :

a) $r = 3$ et $\theta = -\pi$ c) $r = 2$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

b) $r = 6$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ d) $r = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Représenter ensuite ces points dans un plan.

9.13 - - **Corrigé -** Donner les coordonnées polaires des points de coordonnés cartésiennes suivants :

a) $x = 0$ et $y = 3$ c) $x = 2$ et $y = 2$
b) $x = 6$ et $y = 0$ d) $x = -5$ et $y = -5$

Représenter ensuite ces points dans un plan.

Algorithmique

9.14 - - Expliquer ce que fait l'algorithme suivant :

TI

```
PROGRAM :PRINCIP
: Prompt A,B
: int(A/(2B))->K
: A-2K->R
: If R>B
: Then
: R-B2->R
: End
: Disp « R= »,R
: Disp « B= »,B
```

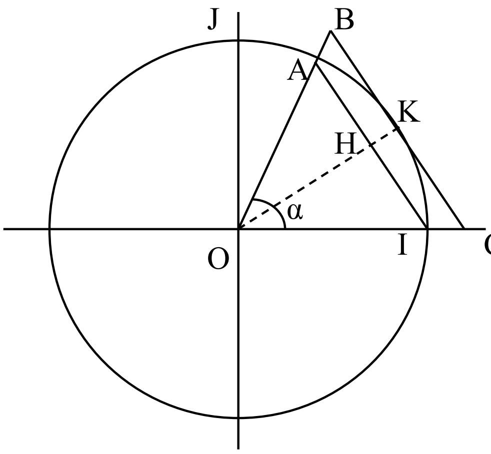
CASIO

```
=====MP API÷B=====
« A= » :?->A
« B » :?->B
Int(A÷(2B))->K
A-2KB->R
If R>B
Then R-2B->R
IfEnd
"R=":R
"B=":B
```

b) Faire tourner le programme pour quelques valeurs particulières, puis vérifier à la main le résultat obtenu.

9.15 - - Construire un algorithme donnant toutes les mesures d'angles orientés de l'intervalle]-9π ; 9π[ayant pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$.

9.16 - - On considère deux polygones réguliers, l'un inscrit dans le cercle trigonométrique, l'autre tangent extérieurement au cercle. Chaque polygone possède n côtés et chaque côté correspond à un angle au centre, en degré, égal à $\alpha = \frac{360}{n}$.



a) Montrer que la longueur d'un côté du polygone intérieur est : $2\sin(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\frac{180}{n})$.

b) Montrer que la longueur d'un côté du polygone extérieur est : $2\tan(\frac{\alpha}{2}) = 2\tan(\frac{180}{n})$.

c) En déduire les périmètres et les aires de ces deux polygones en fonction de n.

d) Ecrire, avec la calculatrice (ou un ordinateur), un programme donnant le périmètre et l'aire de ces deux polygones en fonction de n.

e) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il détermine un encadrement de π à 10^{-3} près, dans les deux cas.

9.17 - - corrigé - On cherche à résoudre l'équation cos x = x sur l'intervalle I = $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Pour cela, on définit la fonction f par f(x)= cos x – x que l'on admettra strictement décroissante sur I et on résout l'équation f(x) = 0 par dichotomie. On pose a = 0 et b= $\frac{\pi}{2}$

a) Vérifier que f(a) $\times$ f(b) < 0. On en déduit que l'équation admet une solution notée α.

b) Déterminer le signe de f(a) $\times$ f($\frac{a+b}{2}$) et en déduire que $\alpha \subset [0 ; \frac{\pi}{4}]$.

c) On remplace alors b par $\frac{a+b}{2}$, déterminer maintenant le signe de f(a) $\times$ f($\frac{a+b}{2}$) et en déduire l'intervalle de définition de α.

d) Compléter l'algorithme suivant

```
Saisir (A,B,N) ;
Pour I allant de ….. à …..
        Si (f(A)*f((A+B)/2)<0) alors
        B = …….. ;
        Sinon
        A = …….. ;
        FinSi
FinPour
Afficher (A,B) ;
```

e) Après avoir rentré la fonction dans votre calculatrice, programmer l'algorithme précédent, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Chapitre X : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Calcul de produits scalaires

10.1 - - $(\vec{i}, \vec{j})$ étant une base orthonormée

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque :

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$

c) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$

d) $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

10.2 - - Corrigé - Deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Démontrer que :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

10.3 - - Soit ABCD un parallélogramme tel que AB = 6, AD = 4 et l'angle de sommet D mesure 60°.

a) calculer . $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

10.4 - - Dans un repère orthonormal, on place les points : A(4 ;1), B(0 ;5) et C(-2 ;-1).

a) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

c) Calculer les angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

d) H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer AH et CH.

Calculs dans un triangle

10.5 - - Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 6. On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle. Calculez $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

10.6 - - Soit ABCD un rectangle tel que AB = 5 et AD = 3. On appelle A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur la droite (BD). En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$, calculer la distance A'C'.

10.7 - -Corrigé - [AB] est un segment de 2 cm, C est un point de sa médiatrice et AC= 4cm.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

b) Calculer les angles $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$ du triangle ABC.

Equations de droites et de cercles

10.8 - - Corrigé - Déterminer une équation du cercle Γ répondant aux conditions suivantes :

a) (Γ) a pour centre A(1;-1) et passe par B(2,3).

b) (Γ) a pour centre A(-2,1) et pour rayon 3.

c) (Γ) est un cercle de diamètre A(1,2) B(4,-2).

10.9 - - Soit (Γ) un cercle de centre O de coordonnées (3;1) et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4;3).

a) Vérifier que A appartient au cercle.

b) Déterminer l'équation de la tangente au cercle en A.

10.10 - - Dans un repère orthonormal, on place les points : A(-2;-1), B(6 ;1) et C(2 ;5).

a) Déterminer les équations des hauteurs issues de A et de B du triangle ABC, puis les coordonnées de l'orthocentre H.

b) Trouver les coordonnées du point Ω, centre du cercle circonscrit à ABC.

c) Trouver les coordonnées du centre de gravité G.

d) Vérifier que H, Ω et G sont alignés.

Lieux géométriques

10.11 - - Soit ABC un triangle équilatéral, on pose AB = a. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient : $\frac{3}{4}a^2 \leq (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2 \leq 3\,a^2$

10.12 - - Soit [AB] un segment de longueur 6. Déterminer et dessiner les lignes géométriques décrites par les points M qui vérifient :

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$ avec k = {0 ; 2 ; - 5 ; 7}

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ avec k = {0 ; -10 ; -9 ; 5}

10.13 - - Corrigé – Dans un repère orthonormal, on place les points : A(4;-1), B(3 ;2) et C(-2 ;1). Soit le point M de coordonnées (x, y).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}$.

b) Donner l'équation de l'ensemble défini par: $\| 3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC} \|$.

c) Donner la nature de cet ensemble.

Algorithmique

10.14 - - Le but de cet exercice est d'écrire un algorithme permettant la construction de l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$=k, avec AB = 5cm et k réel

1) $k \neq 0$

a) La méthode consiste à commencer par déterminer le point H appartenant à la droite (AB) vérifiant l'égalité donnée dans l'énoncé. A quelle distance d du point A le point H est-il situé ?

b) Géométriquement, H est l'un des deux points d'intersection H_1 et H_2 de (AB) avec le cercle de centre A et de rayon d. Compléter la ligne 4 de l'algorithme qui permet de tracer de cercle.

```
k=Input (« valeur du produit scalaire : ») ;
ab=5 ; //distance AB
l=Line (« A », « B ») ;
c=FixedCircle("A",……… );
Intersections("H1","H2",1,c);
e=Expression("a(H1,A,B)",0,0);
ang=GetExpressionValues(e);//valeur de l'angle
if(k>0){
        if(ang== ……. ){
                Perpendicular(l,"H1");
        }
}
Else{
        ……….
}
```

c) On considère l'angle $\widehat{H1AB}$ (lignes 6 et 7 de l'algorithme). Si k>0, quelle doit être la valeur de cet angle pour que l'ensemble recherché soit la perpendiculaire à (AB) passant par H_1 ? Compléter la ligne 9 de l'algorithme.

2) a) Quel est l'ensemble des points recherchés lorsque k=0 ?

b) Tester cet algorithme en saisissant 0 pour la valeur de k. Que se passe-t-il ? Expliquer

Partie C : CORRIGES

Chapitre I : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

1.3
a) Tout mettre au même dénominateur et résoudre le trinôme du second degré correspondant au numérateur avec $x \neq -2$ et $x \neq 1$.
b)c) Poser $X=x^2$ et se ramener à une équation du second degré en X.
d) Mettre x en facteur.
e) $X=-1$ est une racine évidente, mettre $(x+1)$ en facteur.
f) $2-x-x^2=-2$ ou $2-x+x^2=2$
1.5
Faire un tableau de signe pour étudier le signe du numérateur et du dénominateur. L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty;-3\right[\cup \left[\frac{-13}{5};-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$$

1.7
$E(x)=(x-1)^2(x+2)$ du signe de $(x+2)$.
On a ainsi : $a = -3$ et $b = 2$.
D'où $E(x)>0$ équivaut à $x>-2$ et $x \neq -1$.
1.10
a) Soient x et y l'âge des deux amis. On a : $x+y=53$ et $(x+5)(y+5)=990$. Il faut ensuite résoudre l'équation du second degré en y et $x=53-y$.
b) On peut mettre le problème en équation :
$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=509$ d'où : $S=\{12 ;13 ;14\}$

On peut mettre le problème en équation et la résoudre:
$x(x+1)(x+2)= x+(x+1)+(x+2)$
$x=1$ est racine évidente, $x=-1$ et $x=-3$ sont les deux autres racines d'où :
$S1=\{-3 ;-2 ;-1\}$, $S2=\{-1 ;0,1\}$ et $S3=\{1,2,3\}$

1.13
Dans cet algorithme, les trois variables A,B et C à initialiser sont les coefficients du polynôme :

```
Variables
        A,B,C,delta,N
Début
        Saisir A,B,C
        delta prend la valeur B²-4*A*C
        Si delta > 0 alors
                N prend la valeur 2
        FinSi
        Si delta = 0 alors
                N prend la valeur 1
        FinSi
        Si delta < 0 alors
                N prend la valeur 0
        FinSi
        Afficher « Le polynôme admet »
        Afficher N
        Afficher « solution(s) »
Fin
```

Chapitre II : FONCTIONS NUMERIQUES

2.1
a) f paire
b) e) c) f impaire
d) ni paire, ni impaire, ni périodique
f) période 2π

2.7
a) $f(x) = (2-x)-(-x-1)-(-2x+1)$ sur $\left]-\infty;-1\right[$
$f(x) = (2-x)-(x+1)-(-2x+1)$ sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right[$
$f(x) = (2-x)-(x+1)-(2x-1)$ sur $\left[\frac{1}{2};2\right[$
$f(x) = (-2+x)-(x+1)-(2x-1)$ sur $\left[2;+\infty\right[$
b)c) Variations de fonctions affines.
d) Voir représentation graphique.

2.10
$A(x)=9x^2+6x+1-2x+3x(x^2+4x+4)+2x-2$
$A(x)=9x^2+6x+1-2x+3x^3+12x^2+12x+2x-2$
$A(x)=3x^3+9x^2+12x^2+6x-2x+12x+2x-2+1$
A est un polynôme de degré 3.
$A(x) = 3x^3 + 21x^2 + 18x - 1$.

2.12 $f(x)=\dfrac{a(x^2-x+1)+b}{(x^2-x+1)} = \dfrac{a\,x^2-ax+(a+b)}{(x^2-x+1)}$
En identifiant à f(x), on obtient :
$a = 1$ et $b = -2$.

2.15
a) Pour x = 0, l'algorithme affichera :
« si x = 0 alors impossible »
Pour x = -1, l'algorithme affichera :
« si x = -1 alors impossible »
Pour x = 1, l'algorithme affichera :
« si x = 1 alors impossible »
Pour x = 2, l'algorithme affichera :

« si x = 2 alors y = 2 »
Pour x = 3, l'algorithme affichera :
« si x = 3 alors y = $2/\sqrt{2}$ »
Pour x = 4, l'algorithme affichera :
« si x = 4 alors y = $2/\sqrt{3}$ »
Pour x = 5, l'algorithme affichera :
« si x = 5 alors y = 1 »
b) Pour des valeurs de x inférieures ou égale à 1, on ne remplit pas la première condition « si », c'est donc l'instruction qui suit le « sinon » qui est exécutée.
c) Pour tout x>1, on a y=$\frac{2}{\sqrt{x-1}}$, l'ensemble de définition de cette fonction est donc D_f =]1 ;+∞[
d) La fonction racine carrée est strictement croissante sur D_f, donc son inverse aura les variations opposée. On en déduit que la fonction $x \to \frac{2}{\sqrt{x-1}}$, est strictement décroissante sur D_f.

Chapitre III : DERIVATION ET APPLICATIONS

3.1 a) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 6$
3.4 f(3+h) = $(3+h)^2$=f(3)+f'(3)h pour h proche de 0.
f(3,002)=f(3+0,002)=9+0,012=9,012
3.5 a) $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $x_0 = 4$
L'équation de la tangente est :
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x- x_0)$
$= \sqrt{5} + \frac{1}{2\sqrt{5}}(x-4)$
Car $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
3.8 Il faut trouver les valeurs de x telles que $f'(x) = 0$
a) $f'(x) = -2x+4.$
Si $f'(x) = 0$ alors $x = 2$ et c'est un maximum
b) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}.$
Si $f'(x) = 0$ alors $\begin{cases} x = -1 : \text{c'est un minimum} \\ x = 1 : \text{c'est un minimum} \end{cases}$
c) $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-4)^2}.$
Si $f'(x) = 0$ alors $x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$.
Or $x \in I$, donc $x = \frac{5}{2}$ et c'est un minimum.

3.10
c) On a : $f(x) = \frac{2x+5}{x+4}$
1) Df=R-$\{-4\}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$
3) $f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
avec $u(x) = 2x+5 ; u'(x) = 2$
$v(x) = x+4 ; v'(x) = 1$
donc $f'(x) = \frac{3}{(x+4)^2}$
4)

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
f '(x)	+		+
f(x)	2 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 2

Chapitre IV : SUITES NUMERIQUES

4.4 a) $u_n = 2n^2 +1$
$u_{n-1} = 2n^2 - 4n +3$
$u_{n+1} = 2n^2 + 4n +3$
$u_{2n-2} = 8n^2 -16n +9$
$u_{2n+3} = 8n^2 +24n + 19$

4.6 a) $u_{n+1} - u_n = 1 + 2(-1)^{n+1}$
On a donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ si n impair
$u_{n+1} - u_n < 0$ si n pair
La suite (u_n) est donc ni croissante, ni décroissante, ni constante.
b) Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.
c) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
d) Utiliser le fait que $u_{n+1} - u_n = n^2$

4.8 a) $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, …., $u_5 = \frac{1}{6}$.

b) $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$,….., $v_5 = 6$.

c) v_n est arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison r = 1.

$v_n = v_0 + nr = 1 + n$ d'où $u_n = \frac{1}{1+n}$.

4.17 c) Si on pose $u_n = \frac{1}{(10)^n}$, $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_7$ avec (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_o = 1$ et de raison $q = \frac{1}{10}$.

D'où : $S = \frac{(1-q^8)}{(1-q)}$

Chapitre V : STATISTIQUES

5.2 Elève 1 : moy. = 9,78 ; var = 7,95 ; $\sigma = 2{,}82$

Elève 2 : moy. = 10,22; var = 5,73; $\sigma = 2{,}39$

L'élève 2 est le plus régulier car son écart-type est le plus petit (indice qui mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne).

5.4 On place les valeurs en ordre croissant.
Effectif total N =12.
N/4=3 donc $Q_1 = 4$.
3N/4=9 donc $Q_3 = 23$

$Me = \frac{10+18}{2} = 14$.

Chapitre VI : PROBABILITES

6.2 a) Il y a 8 carreaux dans le jeu de 32 cartes, donc $P_1 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

b) Il y a 4 valets dans le jeu de 32 cartes, donc $P_2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

c) Il y a un seul valet de carreau dans le jeu de 32 cartes. Donc $P = \frac{1}{32}$ = P1 x P2.

6.7

a) X= -1, X=1, X=2 et X= 4.

b) $P(X=-1) = \frac{9}{19}$, $P(X=1) = \frac{6}{19}$, $P(X=2) = \frac{3}{19}$, $P(X=4) = \frac{1}{19}$.

c) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = \frac{7}{19}$

E(X) correspond à l'espérance de gain : ici, le jeu est donc favorable au joueur.

Chapitre VII : LOI BINOMIALE

7.2

a) Soit P(N) la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage. $P(N) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

La probabilité d'obtenir deux boules noires est donc : $P(NN) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

b) De même, $P(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

La probabilité d'obtenir deux boules blanches est donc : $P(BB) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

c) Notons A l'événement « obtenir deux boules de même couleur)

La probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est la probabilité d'obtenir deux boules noires ou deux boules blanches, donc P(A) = P(NN) + P(BB) = $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

d) l'évènement « obtenir deux boules de couleurs différentes » est l'événement contraire de « obtenir deux boules de même couleur ». O cherche donc P ($\bar{A}$) = 1 – P(A) = 1 - $\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

7.7 - L'épreuve « choisir un des joueurs » comporte deux issues possibles contraires :

- « le joueur arrive à toucher le panier » appelé succès de probabilité p = 0,85
- « le joueur ne touche pas le panier » appelé échec de probabilité q=1-p = 1-0,85 = 0,15

On répète 50 fois ce tirage de façon indépendante, on réalise donc un schéma de 50 épreuves de Bernoulli de paramètre n=50 et p=0,85. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, nous avons donc un modèle binomial.

7.12 - a) L'épreuve « taper sur le clavier » comporte deux issues possibles contraires :

- « la touche est la lettre a » appelé succès de probabilité p = $\frac{1}{40}$
- « la touche n'est pas la lettre a » appelé échec de probabilité q=1-p = 1- $\frac{1}{40}=\frac{1}{39}$

On répète 100 fois cette expérience de façon indépendante, on réalise donc un schéma de 100 épreuves de Bernoulli de paramètre n=100 et p=$\frac{1}{40}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, nous avons donc un modèle binomial.

b) P(X=15) correspond à la probabilité de taper 15 fois sur la touche « a » au cours des 100 expériences.

Appliquons la loi binomiale : P(X=15) = $\binom{100}{15}\times\left(\frac{1}{40}\right)^{15}\times\left(\frac{1}{39}\right)^{(100-15)}$

P(X≤15) correspond à la probabilité de taper 15 fois ou plus sur la touche « a » au cours des 100 expériences.

P(X≤15) = P(X=15) + P(X=16) + … + P(X=100) (à calculer à l'aide d'un tableur)

E(X) correspond à l'espérance de X. E(X)= np = 100× 0,025 = 2,5. L'enfant touche en moyenne 2,5 fois la lettre a lors des 100 expériences.

7.17 - a) L'épreuve « choisir » comporte deux issues possibles contraires :

- « la pièce est défectueuse » appelé succès de probabilité p = 0,01
- « la pièce n'est pas défectueuse » appelé échec de probabilité q=1-p = 1- 0,01 = 0,99

On a un échantillon de 10 000 pièce et les succès sont indépendants, nous avons donc un modèle binomial de paramètre B(10000 ; 0,01).

b) Voici l'extrait d'une feuille de calcul concernant une variable aléatoire X correspondant au nombre de pièce ayant un défaut, suivant une loi binomiale B (10000 ; 0,01).

80	0,02213083
81	0,02845774
119	0,97240274
120	0,97788551

Donc k1 = 81 et k2 = 120

I = [$\frac{81}{10000}$; $\frac{120}{10000}$]

c) f = $\frac{150}{10\,000}$ ∉ I, l'hypothèse n'est pas vérifiée

7.20 - La probabilité d'obtenir un 2 avec un dé tétraédrique est 0,25, on considère l'événement « obtenir un 2 » comme le succès, donc p=0,25 et q=0,75.

Si on lance le dé 6 fois, on peut obtenir 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 fois le chiffre 2. X suit donc une loi binomiale de paramètre B(6 ;0,25).

On va donc boucler afin de calculer p(X=k) pour k entier compris entre 0 et 6.

Comme on a besoin d'effectuer un calcul de combinaison, on va faire une première boucle, avant de calculer les probabilités associées aux valeurs de X.

```
p = 0,25 ;
n = 6 ;
a=1 ;
Pour k allant de 1 à n exécuter
        a=a*I;
FinPour
b=1;
c=1;
Pour k allant de 0 à n exécuter
        Si  k=0 ou k=n alors
                comb = 1 ;
        Sinon
                Pour i allant de 1 à k exécuter
                        b=b*i ;
                Fin Pour
                Pour j allant de 1 à (n-k) exécuter
                        c=c*j ;
                Fin Pour
                comb=a/(b*c) ;
        Fin si
        P[k]=comb*p^k*(1-p)^(n-k) ;
        Afficher "pour k="
        Afficher k
        Afficher ", p ="
        Afficher P[k]
FinPour
```

Chapitre VIII : GEOMETRIE PLANE

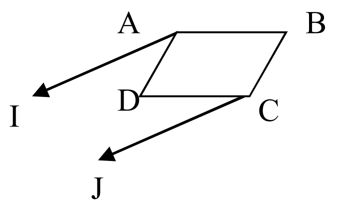
8.1

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\,\overrightarrow{EF}$.

b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=2\,\overrightarrow{FE}$.

c) $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ si x = y.

8.6 - On sait que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$ donc ACJI est un parallélogramme. Or les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc [AJ] et [CI] ont le même milieu.



8.9 -

a) $\vec{u}$ (1 ; -3) donc –b = 1 et a = -3

L'équation de la droite est donc -3x -y + c = 0

comme la droite passe par le point A(-2 ; 6), alors :

-3 × (-2) -6 + c = 0

6 – 6 + c = 0

c = 0, l'équation est donc -3x -y = 0

c) Une droite parallèle à l'axe des ordonnées à une équation du type x = a. Ici, la droite passe par le point A (-2 ;6), son équation est donc x = -2.

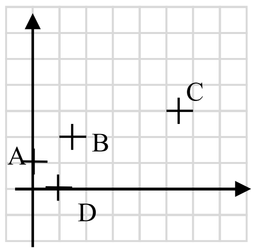
8.12 - Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Calculons les coordonnées de ces vecteurs :

$\overrightarrow{AB}$ (x_B-x_A ;y_B-y_A) → $\overrightarrow{AB}$ (1,5-0 ;2-1) → $\overrightarrow{AB}$ (1,5 ;1)

$\overrightarrow{CD}$ (x_D-x_C ;y_D-y_C) → $\overrightarrow{CD}$ (1-5 ;5 ;0-3) → $\overrightarrow{CD}$ (-4,5 ;-3)

On remarque que $\overrightarrow{AB}$ = -3 × $\overrightarrow{CD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



8.17 - Cet algorithme prend en entrée les coordonnées de 3 points A, B et C. Il calcule ensuite les quotients des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ afin de voir s'ils sont colinéaires et donc si les points sont alignés.

```
Lire (xa, xb et xc) ;
Lire (ya, yb et yc) ;
K1= (xb-xa)/(xc-xa) ;
K2= (yb-ya)/(yc-ya) ;
Si K1=K2
        Afficher « les points son alignés »
        Sinon
        Afficher « les points son alignés »
FinSi
```

Chapitre IX : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

9.1

a) $(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2=$

$(\sin(x))^2+(\cos(x))^2+2\sin(x)\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)$

$+(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=2$

b) $\sin^4(x)+\cos^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)=(\sin^2(x)+\cos^2(x))^2$

$=(1)^2=1$

c) $\sin^4(x)-\cos^4(x)+2\cos^2(x)=(\sin^2(x))^2-\cos^4(x)$

$+2\cos^2(x)=(1-\cos^2(x))^2-\cos^4(x)+2\cos^2(x)=1$

9.6 A l'aide du cercle trigonométrique, on arrive facilement à :

a) A = cos (θ) - sin (θ)

b) B = 2cos (θ)

9.10

$(\vec{u},-\vec{v})=\dfrac{5\pi}{4}$; $(\vec{w},\vec{v})=\dfrac{7\pi}{12}$

$(-3\vec{u},\vec{v})=\dfrac{5\pi}{4}$; $(2\vec{w},-\vec{v})=\dfrac{19\pi}{12}$

$(5\vec{v},-\vec{v})=\pi$; $(\vec{u},-\vec{w})=\dfrac{2\pi}{3}$

9.13

a) $r=3$; $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ b) $r=6$; $\theta=0$

c) $r=2\sqrt{2}$; $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ d) $r=5\sqrt{2}$; $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$

9.17

a) $f(a) \times f(b) = f(0) \times f(\frac{\pi}{2})$

$= (\cos(0) - 0) \times (\cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2})$

$= 1 \times (-\frac{\pi}{2})$

$= -\frac{\pi}{2} < 0$

Donc $f(a) \times f(b) < 0$

b) $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) = f(0) \times f(\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2})$

$= f(0) \times f(\frac{\pi}{4})$

$= (\cos(0) - 0) \times (\cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4})$

$= 1 \times (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4})$

$= \frac{2\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$ or $2\sqrt{2} \approx 2.828 < \pi$

Donc $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$

c) On sait que $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$

donc $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < f(\alpha)$, or $f(a) = f(0) = 1$ donc $f(\frac{a+b}{2}) < f(\alpha)$. De plus, la fonction f est strictement décroissante, on en déduit que :

si $f(\frac{a+b}{2}) < f(\alpha)$ alors $\frac{a+b}{2} > \alpha$

soit $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

Comme $I = [0 ; \frac{\pi}{2}]$, alors $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$

d) $b = \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{4}$

$f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) = f(0) \times f(\frac{0+\frac{\pi}{4}}{2})$

$= f(0) \times f(\frac{\pi}{8})$

$= (\cos(0) - 0) \times (\cos(\frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{8})$

$= 1 \times (\cos(\frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{8}) \quad > \quad 0$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on en déduit que $\alpha \in [\frac{\pi}{8} ; \frac{\pi}{4}]$

```
Saisir (A,B,N) ;
Pour I allant de 1 à N
        Si (f(A)*f((A+B)/2)<0) alors
        B = (a+b)/2 ;
        Sinon
        A = (a+b)/2 ;
        FinSi
FinPour
Afficher (A,B) ;
```

Chapitre X : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

10.2

(AC) est perpendiculaire à (BD) donc

$\vec{AC}.\vec{BD} = 0$ en utilisant la relation de Chasles

donc $(\vec{AD} + \vec{DC}).(\vec{BD}) = \vec{AD}.\vec{BD} + \vec{DC}.\vec{BD} = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC} + \vec{AD}.\vec{CD} + \vec{DC}.\vec{BA} + \vec{DC}.\vec{AD} = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC} + \vec{CD}.\vec{AB} + \vec{AD}(\vec{CD} + \vec{DC}) = 0$

$= \vec{AD}.\vec{BC} + \vec{CD}.\vec{AB} = 0$

10.7

$\vec{AB}.\vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = 2$ .H étant le projeté de C sur (AB).

Pour calculer un produit scalaire, on a souvent intérêt à se ramener à des vecteurs de même origine :

$\vec{AB}.\vec{BC} = -\vec{BA}.\vec{BC} = -2$

$\vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CH}$

car le triangle est isocèle donc : $\vec{AB}.(\vec{CA} + \vec{CB}) = 2\vec{AB}.\vec{CH} = 0$ car (AB) est perpendiculaire à (CH). Pour les calculs d'angles, on peut utiliser les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle d'où :

$\cos(\hat{A}) = \cos(\hat{B}) = \frac{1}{4}$.

Soit $\hat{A} = \hat{B} = 75{,}5°$ et $\hat{C} = 29°$.

10.8

Equation d'un cercle :

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ où :

A est le centre du cercle

R le rayon du cercle.

a) $(x-1)^2+(y+1)^2=R^2$:(C)

Or, $B \in (\ell)$ donc $R^2=17$

donc $(x-1)^2+(y+1)^2=17$:(C)

b) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$:(C)

c) $[AB]$ est un diamètre.

Déterminons le centre et le rayon du cercle.

Soit 0 centre du cercle : $\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_A+y_B}{2} = 0 \end{cases}$;

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc AB=5 donc R=2,5

Ainsi (C): $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$

10.13

a) A(4;-1), B(3 ;2) et C(-2 ;1). Soit le point M de coordonnées (x, y).

$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 3\,(4-x\,,-1-y) + (3-x\,,\,2-y)$
$= (12-3x+3-x\,,\,-3-3y+2-y)$

d'où : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = (15-4x\ ;-1-4y)$

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC} = (4-x\,;-1-y) + 3\,(-2-x\,;1-y)$
$= (4-x-6-3x\,;\,-1-y+3-3y)$

d'où : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC} = (-2-4x\,;\,2-4y)$

b) $\|\,3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\,\| = \|\,\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\,\|$

équivaut à :

$(15-4x)^2+(-1-4y)^2=(-2-4x)^2+(2-4y)^2$

$(15-4x)^2+(1+4y)^2=(2+4x)^2+4(1-2y)^2$

$225-120x+16x^2+1+8y+16y^2$

$=4+16x+16x^2+4-16y+16y^2$

$218-136x+24y=0$

$$\boxed{24y=136x-218}$$

c) L'ensemble est une droite.