SOMMAIRE

<u>Partie A :</u> COURS

Chapitre I : CALCUL ALGEBRIQUE (RAPPELS)

I. RAPPELS SUR LES FRACTIONS

1° Addition de fractions

Pour additionner deux fractions, il faut les **réduire au même dénominateur**. Pour cela, on cherche le plus petit commun multiple des deux dénominateurs.
Puis, on ajoute les numérateurs entre eux :

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}$$

EXEMPLE

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{9}=\frac{5\times 3}{6\times 3}+\frac{7\times 2}{9\times 2}=\frac{15}{18}+\frac{14}{18}=\frac{29}{18}$$

<u>Remarque</u> : vérifier que le résultat est une fraction irréductible.

2° Multiplication de fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

EXEMPLE

$$\frac{5}{12}\times\frac{18}{25}=\frac{5\times 18}{12\times 25}=\frac{5\times 3\times 3\times 2}{3\times 2\times 2\times 5\times 5}=\frac{3}{10}$$

<u>Remarque</u> : décomposer les nombres en produits de nombres premiers permet d'obtenir directement une fraction irréductible.

3° Division de fractions

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

EXEMPLE

$$\frac{8}{5}\div\frac{4}{25}=\frac{8}{5}\times\frac{25}{4}=\frac{2\times 4\times 5\times 5}{5\times 4}=\frac{10}{1}=10$$

II. RAPPELS SUR LES PUISSANCES

1° Définition

Pour tout nombre a et tout nombre n entier naturel, on définit le nombre a^n par :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a\times a}_{\text{n fois}}$$

EXEMPLES

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
- $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

2° Propriétés

- $\left(a^n\right)^m = a^{n \times m}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0)$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- **Attention ! On ne parlera pas de 0^0.**

EXEMPLES

- $\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$
- $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
- $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$
- $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
- $3^0 = 1$

3° Puissances de 10 et notation scientifique

DEFINITION

Ecrire un nombre en notation scientifique, c'est l'écrire sous la forme $a \times 10^n$**,** où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 ($1 \leq a < 10$), et n un entier relatif.

EXEMPLE

Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

1) 1274 $\rightarrow 1274 = 1{,}274 \times 10^3$

2) 0,045 $\rightarrow 0{,}045 = 4{,}5 \times 10^{-2}$

3) $13{,}5 \times 10^6$ $\rightarrow 13{,}5 \times 10^6 = 1{,}35 \times 10 \times 10^6 = 1{,}35 \times 10^7$

Chapitre II : ENTIERS : ARITHMETIQUE

I. DEFINITIONS

1° Nombres entiers

Les nombres entiers sont : 0 ; 1 ; 2… On parle aussi d'entiers naturels.
Les entiers relatifs sont : - 2 ; - 1 ; 0 ; 1 ; 2…

2° Nombres premiers

Un nombre entier différent de 0 et 1 est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
Ex. : 13
Il y en a une infinité, mais si vous devez en retenir quelques-uns, voici les premiers de la liste :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31…

3° La division euclidienne

C'est la division d'un entier par un autre.
Soient deux entiers (relatifs) a et b, il existe deux autres entiers q et r tels que :
$a = b\mathrm{q} + \mathrm{r}$ avec $0 \leq \mathrm{r} < b$

Ex. : $313 = 25 \times 12 + 13$

$$\begin{array}{r|l}
313 & 25 \\ \cline{2-2}
-25 & 12 \\ \cline{1-1}
63 & \\
-50 & \\ \cline{1-1}
13 &
\end{array}$$

313 est le dividende
25 est le diviseur
12 est le quotient
13 est le reste

II. PGCD : PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

Le PGCD de deux nombres entiers a et b est le nombre entier le plus grand qui divise à la fois a et b. On le note PGCD (a ; b).
Ex. : 6 et 10 sont tous les deux divisibles par 2. 2 est seul diviseur commun à 6 et 10.
$6 = \underline{2} \times 3$ $10 = \underline{2} \times 5$ PGCD (6 ; 10) = 2

1° Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier est le produit de nombres premiers.
Pour obtenir cette décomposition, on le divise tour à tour par les nombres premiers dans leur ordre croissant.
Ex. :

$$\begin{array}{r|l}
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs à l'un et à l'autre.
Ex. :

$$\begin{array}{r|l} 180 & \underline{2} \\ 90 & 2 \\ 45 & \underline{3} \\ 15 & \underline{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 126 & \underline{2} \\ 63 & \underline{3} \\ 21 & \underline{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

PGCD (180 ; 126) = $2 \times 3 \times 3 = 18$

2° Algorithme d'Euclide

On procède par divisions successives, en remplaçant à chaque fois le dividende par le diviseur précédent et le diviseur par le reste précédent.
Le dernier reste non nul est le PGCD.

Ex. : $180 = \underline{126} \times 1 + \mathit{54}$
$126 = \underline{54} \times 2 + \boldsymbol{18}$
$54 = 18 \times 3 + \mathit{0}$

PGCD (180 ; 126) = 18

Quotient	*1*	*2*	*3*
180	*126*	*54*	***18***
Reste	*54*	*18*	*0*

3° Nombres premiers entre eux

Deux nombres *a* et *b* sont dits premiers entre eux lorsque leur PGCD est 1.
Deux nombres divisés par leur PGCD sont premiers entre eux.

Alors la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Ex. : PGCD (6 ; 10) = 2
6 : 2 = 3 et 10 : 2 = 5
3 et 5 sont premiers entre eux.
$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ et $\frac{3}{5}$ est irréductible.

Chapitre III : DEVELOPPEMENTS – FACTORISATIONS – IDENTITES REMARQUABLES

I. DEVELOPPEMENTS

DEFINITION
Développer un calcul signifie faire disparaître les parenthèses en effectuant les multiplications. Pour cela, on applique la distributivité :

$$a(b+c) = a \times b + a \times c = ab + ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

EXEMPLES

1) $(8x+3)(-2x+1)$
$$= 8x \times (-2x) + 8x \times 1 + 3 \times (-2x) + 3 \times 1$$
$$= -16x^2 + 8x - 6x + 3$$
$$= \underline{-16x^2 + 2x + 3}$$

2) $4(x-3)(2x+5)$
$$= (4x-12)(2x+5)$$
$$= 4x \times 2x + 4x \times 5 - 12 \times 2x - 12 \times 5$$
$$= 8x^2 + 20x - 24x - 60$$
$$= \underline{8x^2 - 4x - 60}$$

II. FACTORISATIONS

DEFINITION
Factoriser signifie transformer une somme algébrique en un produit de plusieurs éléments, en faisant apparaître un facteur commun :

$$ab + ac + ad = a(b+c+d)$$ (ici, *a* est le facteur commun)

EXEMPLE

$$\underline{(x+2)}(x-5) - (2x+6)\underline{(x+2)} = (x+2)[(x-5)-(2x+6)]$$
$$= \underline{(x+2)(-x-11)}$$

MÉTHODE PRATIQUE POUR FACTORISER UN CALCUL

$$A = (x-2)(2x+3) + 4(x-5)(x-2)$$

Etape 1 : repérer le nombre de membres du calcul.

$$A = \underbrace{(x-2)(2x+3)}_{\text{1er membre}} + \underbrace{4(x-5)(x-2)}_{\text{2e membre}}$$

Etape 2 : chercher le facteur commun à chaque membre (le souligner une fois dans chaque membre).

$$A = \underbrace{\underline{(x-2)}(2x+3)}_{\text{1er membre}} + \underbrace{4(x-5)\underline{(x-2)}}_{\text{2e membre}}$$

Etape 3 : mise en facteur.
On place le facteur commun en tête de calcul, multiplié à un crochet contenant les éléments non soulignés de chaque membre du calcul.

$$A = (x-2)[(2x+3) + 4(x-5)]$$

Etape 4 : on réduit l'intérieur du crochet.

$\boxed{A = (x-2)(6x-17)}$

REMARQUE 1 : une fois la factorisation effectuée, le facteur commun n'apparaît plus qu'une fois pour l'ensemble du calcul, au lieu d'une fois dans chaque membre.

REMARQUE 2 : le résultat est une suite de parenthèses multipliées entre elles. On a donc bien factorisé le calcul.

III. IDENTITES REMARQUABLES

Les identités remarquables sont des égalités permettant de développer ou de factoriser plus rapidement un calcul.

développement $\longrightarrow$

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\longleftarrow$ **factorisation**

COMMENT APPLIQUER LES IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour développer et réduire :

Ex. : $(2x-3)^2$

On reconnaît l'identité remarquable n°2 : $(a-b)^2$

ici $a = 2x$ $b = 3$

donc $(2x-3)^2 = \underbrace{(2x)^2}_{a^2} - \underbrace{2\times 2x\times 3}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = 4x^2 - 12x + 9$

Remarque : lorsqu'on veut développer, on applique les formules d'identités remarquables de gauche à droite.

Pour factoriser :

Ex. : $9x^2 + 6x + 1$

On reconnaît l'identité remarquable n°1 : $a^2 + 2ab + b^2$

ici $a^2 = 9x^2$ et $b^2 = 1$

donc $a = 3x$ et $b = 1$

donc $\underbrace{9x^2}_{a^2} + \underbrace{6x}_{2ab} + \underbrace{1}_{b^2} = \underbrace{(3x+1)^2}_{(a+b)^2}$

Remarque : lorsqu'on veut factoriser, on applique les formules d'identités remarquables de droite à gauche.

EXERCICES D'APPLICATION

I- Développer et réduire :

1) $(x+3)^2$ **2)** $(2x-5)^2$ **3)** $(x-7)(x+7)$

Réponses :

1) $(x+3)^2 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ (IR. n°1)

2) $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$ (IR. n°2)

3) $(x-7)(x+7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$ (IR. n°3)

II- Factoriser :

1) $x^2 + 6x + 9$ **2)** $x^2 - 4x + 4$ **3)** $x^2 - 16$

Réponses :

1) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 = (x+3)^2$ (IR. n°1)

2) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 = (x-2)^2$ (IR. n°2)

3) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$ (IR. n°3)

Chapitre IV : RACINES CARREES

I. DEFINITION

Si *a* désigne un nombre positif, on appelle $\sqrt{a}$ (la racine carrée de *a*), le nombre positif dont le carré est égal à *a*.

Ainsi, si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a} \geq 0$, et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

ATTENTION !

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

EXEMPLES

- $\sqrt{9} = 3$ **car le carré de 3 est 9.**
- $\sqrt{16} = 4$ **car le carré de 4 est 16.**

II. PROPRIETES

Si *a* et *b* sont deux nombres positifs, alors :

- $\sqrt{a} \geq 0$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ alors $a = b$
- $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = |a| = a \quad (\text{car } a > 0)$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ATTENTION ! $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

La racine d'une somme n'est pas égale à la somme des racines.

L'opération située sous la racine n'est pas une multiplication ou une division.

Dans ce cas, pour simplifier le calcul, il faut effectuer l'addition $a + b$.

Exemple : Simplifier : $A = \sqrt{9+16}$

$A = \sqrt{25}$

$A = \sqrt{5^2} = 5$

III. VALEURS IMPORTANTES

Les nombres qui ont une racine carrée entière sont appelés **carrés parfaits**. Pour simplifier les calculs avec des racines carrées, il est recommandé de connaître les valeurs suivantes :

$0^2 = 0$ donc $\sqrt{0} = 0$	$6^2 = 36$ donc $\sqrt{36} = 6$
$1^2 = 1$ donc $\sqrt{1} = 1$	$7^2 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$
$2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$	$8^2 = 64$ donc $\sqrt{64} = 8$
$3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$	$9^2 = 81$ donc $\sqrt{81} = 9$
$4^2 = 16$ donc $\sqrt{16} = 4$	$10^2 = 100$ donc $\sqrt{100} = 10$
$5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 5$	$11^2 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$

IV. UTILISATION DES RACINES CARREES

1° Simplifier des calculs contenant des racines carrées

Simplifier une racine carrée signifie rendre le nombre entier situé sous la racine le plus petit possible. Pour cela, on applique la méthode suivante :

Ex. : simplifier $A = \sqrt{75}$

Etape 1 : décomposer le nombre sous la racine en produits de nombres premiers, **en y faisant apparaître des carrés parfaits**.

$A = \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3 \times 5^2}$

Etape 2 : décomposer la grande racine en racines simples grâce à la propriété suivante : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$A = \sqrt{3} \times \sqrt{5^2}$

Etape 3 : utiliser $\sqrt{a^2} = a$ (car $a > 0$) pour simplifier le calcul. : $A = \sqrt{3} \times 5$ donc $A = \underline{5\sqrt{3}}$.

2° Résolution d'une équation de type $x^2 = a$ (avec a nombre positif)

Pour résoudre une équation du type $x^2 = a$, on applique la méthode suivante :

Etape 1 : faire passer tous les membres à gauche du calcul.

Ainsi, on obtient : $x^2 - a = 0$

$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ car si $a \geq 0$, alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Etape 2 : on reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

donc $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0$

Etape 3 : On obtient ainsi une équation-produit, que l'on résout en utilisant la règle suivante : **un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul** (cf. chapitre V-Equations)

On a donc : $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

$\underline{x = \sqrt{a}}$ ou $\underline{x = -\sqrt{a}}$

Donc les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

3° Notion de valeur exacte

Dans de nombreux exercices contenant des racines carrées, on demande de donner le résultat en **valeur exacte**. Dans ce cas, il faut simplifier les racines carrées au maximum à l'aide de la méthode expliquée dans le paragraphe I, et ce résultat simplifié sera la valeur exacte demandée.

EXEMPLE

Résultat obtenu : $AB = \sqrt{12}$.

On écrit alors : $AB = \sqrt{3 \times 2^2} = \sqrt{3} \times 2$

Donc $\underline{AB = 2\sqrt{3}}$ $\rightarrow$ **ce résultat simplifié au maximum est la valeur exacte demandée.**

Si on souhaite obtenir une **valeur approchée**, on peut effectuer $2\sqrt{3}$ avec la calculatrice.

On trouve alors : $AB = 3{,}46$ à 10^{-2} près.

Chapitre V : EQUATIONS - INEQUATIONS

I. EQUATIONS

1° Définition

Une équation est une égalité qui comprend une ou plusieurs inconnues. Lorsqu'il n'y a qu'une inconnue, celle-ci est en général notée *x*.
Résoudre une équation signifie trouver la ou les valeurs de *x* qui rendent l'égalité vraie.

Ex. : $x - 1 = 0$
Si l'on choisit $x = 1$, alors on obtient : $1 - 1 = 0$
L'égalité est donc vérifiée pour $x = 1$. Donc 1 est solution de l'équation.

2° Résoudre une équation du premier degré (type ax + b = 0)

METHODE POUR RÉSOUDRE UNE EQUATION DU PREMIER DEGRE

Ex. : Résoudre $3x + 2 = -5x + 8$

Etape 1 : On regroupe tous les termes contenant *x* à gauche du signe égal, et tous les autres termes à droite.

$$3x + 5x = 8 - 2$$
$$8x = 6$$

Etape 2 : On isole *x* à gauche du signe égal. Pour cela, on divise les deux membres de l'équation par 8.

$$x = \frac{6}{8} \qquad \text{donc} \qquad x = \frac{3}{4}.$$

La solution de l'équation est $\frac{3}{4}$.

Remarque : une équation du premier degré a en général une solution unique.

Cas particulier n°1: Une équation peut avoir une infinité de solutions.

Ex. : $4x + 1 + x = 3 + 5x - 2$
$$5x - 5x = 1 - 1$$
$$0 = 0$$

L'égalité obtenue est vraie quelle que soit la valeur de *x* choisie.
Donc l'équation admet une infinité de solutions.

Cas particulier n°2 : Une équation peut n'avoir aucune solution.

Ex. : $3x + 2 = 2x + 5 + x$
$$3x - 3x = 5 - 2$$
$0 = 3$. L'égalité obtenue est fausse puisque $0 \neq 3$.

Donc il n'y a aucune valeur de *x* vérifiant l'équation. L'équation n'admet donc aucune solution.

3° Résoudre une équation du second degré

Une équation du second degré est une équation contenant des x^2. Pour résoudre ce type d'équations, on applique la méthode suivante.

Ex. **:** Résoudre $x^2 - 16 = (2x+1)(x+4)$

Etape 1 : On place tous les termes de l'équation à gauche du signe «égal », de façon à obtenir 0 à droite.
On a alors : $x^2 - 16 - (2x+1)(x+4) = 0$

Etape 2 : On factorise le côté gauche de l'équation en utilisant la méthode de factorisation habituelle et/ou grâce aux identités remarquables (voir chapitre III).

Ici, on reconnaît l'identité remarquable $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$ qui permet de factoriser le premier membre du calcul sous la forme $(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$.

On obtient alors : $\underline{(x+4)}(x-4) - (2x+1)\underline{(x+4)} = 0$
On reconnaît alors le facteur commun $(x+4)$ qui permet de factoriser l'ensemble du calcul.

Etape 3 : Une fois la factorisation effectuée, on obtient un produit de facteurs du premier degré (ne contenant plus de x^2). La forme obtenue est appelée **équation-produit**.
$(x+4)(-x-5) = 0$

Etape 4 : Pour résoudre cette équation-produit, on applique la règle suivante : **un produit de facteurs est nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul**.

Donc : **soit** $x+4=0$ **soit** $-x-5=0$
$x=-4$ $-x=5$

4° Mise en équation d'un problème

La plupart des problèmes posés en français nécessitent la mise en équation de l'énoncé. Pour cela, on adopte la démarche suivante.

Etape 1 : Choix de l'inconnue *x.* (En général, il s'agit du nombre qu'il faut trouver dans le problème).

Etape 2 : Mise en équation de l'énoncé. Il s'agit en pratique de traduire les phrases en français par une relation mathématique équivalente.

Etape 3 : On résout l'équation créée avec la méthode habituelle.

Etape 4 : On répond à la question posée dans l'énoncé par une phrase en français.

EXEMPLE

Un papetier livre à une entreprise 16 stylos à bille à 4 euros, 8 crayons à 2 euros et 8 cahiers à spirale.
Il présente une facture de 100 €. Quel est le prix d'un cahier ?

SOLUTION

<u>Etape 1</u> : Soit x le prix d'un cahier à spirale.

<u>Etape 2</u> : $\underbrace{8\times x}_{\text{prix de 8 cahiers}} + \underbrace{8\times 2}_{\text{prix de 8 crayons}} + \underbrace{16\times 4}_{\text{prix de 16 stylos}} = 100$

<u>Etape 3</u> : On résout l'équation : $8x+16+64=100$

$$8x = 20$$
$$x = 2,5$$

II. INEQUATIONS

1° Définition

Une inéquation est une inégalité qui comporte une inconnue notée x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver l'ensemble des valeurs de x qui vérifient l'inégalité. La solution d'une inéquation est en général un intervalle.

<u>Remarque</u> : seules les inéquations du premier degré à une inconnue sont au programme de troisième.

INEGALITE STRICTE
Le signe $<$ se lit « **strictement inférieur à** ».
Le signe $>$ se lit « **strictement supérieur à** ».

INEGALITE LARGE
Le signe $\leq$ se lit « **inférieur ou égal à** ».
Le signe $\geq$ se lit « **supérieur ou égal à** ».

2° Résoudre une inéquation

Pour résoudre une inéquation, on procède de la même façon que pour les équations : on regroupe les x à gauche et les autres termes à droite, puis on isole x à gauche.
ATTENTION !

REGLE FONDAMENTALE SPECIFIQUE AUX INEQUATIONS

Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, on obtient une inéquation de sens contraire.

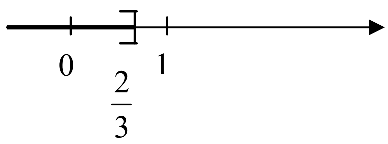
EXEMPLE : $-3x+2\leq 7$ donc $-3x \leq 5$

On divise par (-3) pour isoler x $\Rightarrow$ **l'inéquation change de sens.**
On a alors : $x \geq \frac{5}{-3}$ donc $x \geq -\frac{5}{3}$.

3° Représentation graphique d'une inéquation

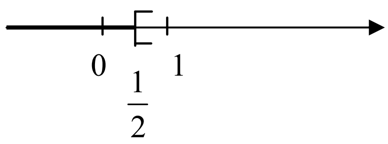
CAS D'UNE INEGALITE LARGE
<u>Ex.</u> : $3x \leq 2$

$$x \leq \frac{2}{3}$$



CAS D'UNE INEGALITE STRICTE
<u>Ex.</u> : $2x < 1$

$$x < \frac{1}{2}$$



Chapitre VI : SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS

I. SYSTEMES D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES

Si l'on cherche à résoudre deux équations simultanément, on parle de **système d'équations**. Les systèmes au programme de troisième comportent en général deux équations à deux inconnues, notées x et y.
Un système de deux équations à deux inconnues est donc de la forme :

$$\begin{cases} \mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0 \\ \mathrm{a'}x + \mathrm{b'}y + \mathrm{c'} = 0 \end{cases}$$

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues signifie trouver les valeurs du couple (x ; y) qui vérifient les deux équations.

1° Résolution par substitution

EXEMPLE

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

SOLUTION

Etape 1 : On isole l'une des inconnues à gauche d'une des équations (ici, on décide par exemple d'isoler x à gauche, dans la première équation).

$$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Etape 2 : Dans la deuxième équation, on remplace x par sa valeur en y trouvée dans la première équation. L'objectif est de n'avoir plus qu'une inconnue y dans la deuxième équation, afin de pouvoir la résoudre.

$$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ 2(-2y + 4) - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Etape 3 : On résout la deuxième équation suivant la méthode de résolution des équations à une inconnue. On continue à recopier la première équation, qui ne sera plus transformée avant qu'on ait fini de résoudre la deuxième.

$$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -4y + 8 - y - 3 = 0 \end{cases}$$

On a alors $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ -5y = -5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -2y + 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Etape 4 : Une fois que la deuxième équation est résolue, on injecte la valeur de y trouvée dans la première équation, pour calculer la valeur de x.

$\begin{cases} x = -2 \times 1 + 4 \\ y = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ La solution du système est le couple (2 ; 1).

2° Résolution par combinaison linéaire

Cette méthode, également appelée méthode d'addition, consiste à éliminer une des inconnues par addition des deux équations.

EXEMPLE

Résoudre : $\begin{cases} 2x+3y=2 & L_1 \\ 3x-5y=-1 & L_2 \end{cases}$

SOLUTION

Etape 1 : On choisit par exemple d'éliminer les y. Pour cela, on multiplie la première équation par 5 et la deuxième par 3. Ainsi, lorsqu'on additionnera ensuite les deux équations, les y s'annuleront.

$$\begin{matrix} 5\times L_1 \\ 3\times L_2 \end{matrix} \begin{cases} 10x+15y=10 \\ 9x-15y=-3 \end{cases}$$

Etape 2 : On additionne les deux équations membre à membre. La nouvelle équation ainsi obtenue apparaîtra en première position, et en deuxième position, on réécrit l'une des deux lignes initiales au choix, de façon à avoir toujours deux équations, donc deux inconnues.

$$L_1+L_2 \quad \begin{cases} 10x+9x+15y-15y=10-3 \\ 2x+3y=2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 19x=7 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$$

Etape 3 : En première position, on a obtenu une équation à une inconnue, ce qui permet de trouver x. Puis, on réinjecte la valeur de x trouvée dans la deuxième équation, ce qui permet ensuite de calculer y.

$$\begin{cases} x=\dfrac{7}{19} \\ 2(\dfrac{7}{19})+3y=2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x=\dfrac{7}{19} \\ 3y=2-\dfrac{14}{19} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=\dfrac{7}{19} \\ y=\dfrac{8}{19} \end{cases}$$

La solution du système est le couple $\left(\dfrac{7}{19};\dfrac{8}{19}\right)$.

3° Mise en équation d'un problème

Certains problèmes nécessitent d'être traduits mathématiquement, non par une, mais par deux équations. On traduit alors l'énoncé par un système de deux équations à deux inconnues, x et y correspondant aux deux nombres cherchés dans le problème.

Pour la mise en équation, la méthode est la même que dans le chapitre V - Equations.

II. INTERPRETATION GRAPHIQUE D'UN SYSTEME

1° Interprétation graphique d'une équation à deux inconnues

Toute équation de la forme $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$ est l'équation d'une droite.

EXEMPLE

$$2x + 3y = 5$$

SOLUTION

On retrouve donc bien la forme usuelle de l'équation de droite (cf. chapitre VIII - Fonctions linéaires et affines).

Cette équation peut être mise sous forme réduite, et on obtient alors :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

> Donc, tous les couples (x ; y) solutions de l'équation $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$ sont les coordonnées des points de la droite D d'équation $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$.

2° Interprétation graphique d'un système

De même, tout système de la forme $\begin{cases} \mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0 \\ \mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}' = 0 \end{cases}$ correspond à deux équations de droites.

Lorsque l'on résout un tel système par le calcul avec l'une des deux méthodes expliquées précédemment, le couple (x ; y) solution du système correspond graphiquement aux coordonnées du point d'intersection des deux droites D et D', d'équations respectives $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$, et $\mathrm{a}'x + \mathrm{b}'y + \mathrm{c}' = 0$.

EXEMPLE

Résoudre graphiquement : $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

SOLUTION

Lorsque l'on résout ce système par le calcul, on obtient comme solution le couple (2 ;1). (voir exemple de résolution par substitution).

<u>Etape 1</u> : Pour la résolution graphique, il faut mettre les deux équations sous forme réduite, puis tracer les deux droites D et D' correspondantes.

D : $x + 2y - 4 = 0$

donc D : $\underline{y = -\frac{1}{2}x + 2}$

De même : D' : $2x - y - 3 = 0$

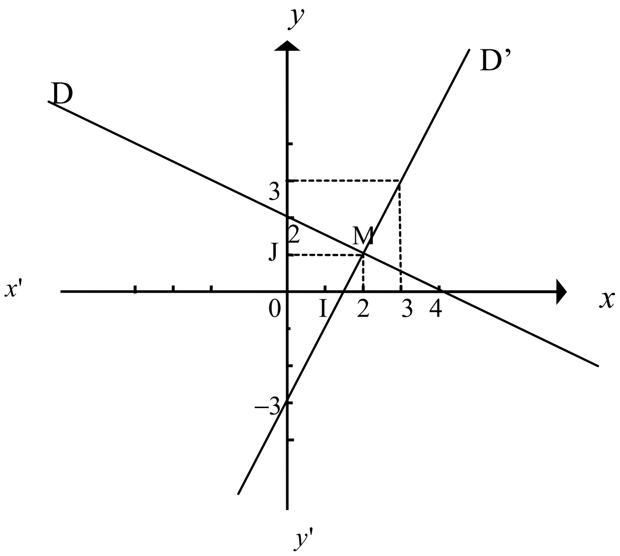
D' : $\underline{y = 2x - 3}$

<u>Etape 2</u> : On trace alors la droite D en choisissant deux points :

si $x = 0$, $y = 2$ si $x = 4$, $y = 0$

De même pour D' :

si $x = 0$, $y = -3$ si $x = 3$, $y = 3$



Le point d'intersection des droites D et D', noté M, a bien pour coordonnées le couple (2 ; 1) trouvé par le calcul.

<u>Remarque</u> : un système peut avoir :

- **Soit une infinité de solutions, et dans ce cas il correspond à l'équation de deux droites confondues.**
- **Soit un couple de solutions (cf. l'exemple), et dans ce cas les deux droites se coupent en un point (ici M).**
- **Soit aucune solution, et dans ce cas le système correspond à l'équation de deux droites parallèles.**

Chapitre VII : REPERES – DISTANCES - DROITES

I. REPERES ET COORDONNEES

1° Définitions

REPERE

Un repère est formé de deux axes gradués sécants entre eux, et d'un point O appelé origine du repère, situé à l'intersection des deux axes.

REPERE ORTHOGONAL

Quand les axes du repère sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.
L'axe horizontal est appelé axe des abscisses et noté (Ox).
L'axe vertical est appelé axe des ordonnées et noté (Oy).

REPERE ORTHONORME

Quand les axes du repère sont perpendiculaires et gradués avec la même unité de longueur, on dit que le repère est orthonormé.
C'est le type de repère le plus fréquemment utilisé.

COORDONNEES D'UN POINT

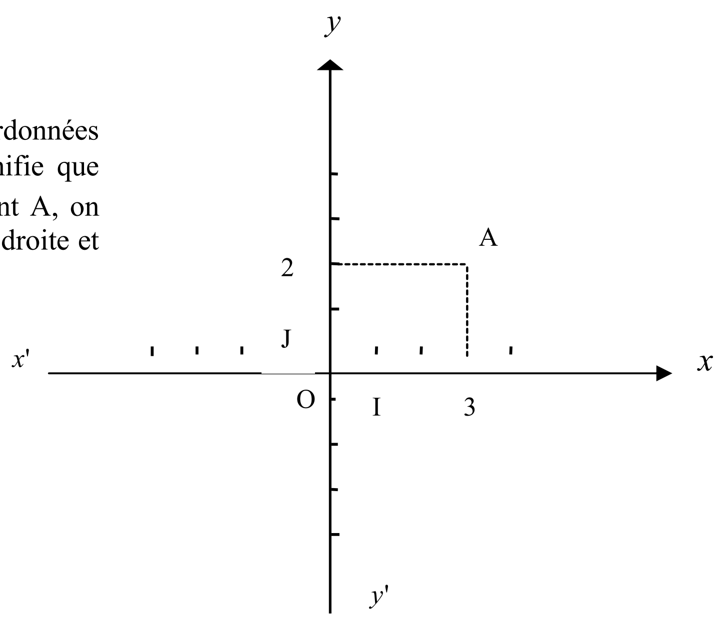
Dans un repère, tout point du plan possède deux coordonnées.
1re coordonnée du point : c'est l'abscisse, notée x.
2e coordonnée du point : c'est l'ordonnée, notée y.
Ces deux coordonnées peuvent se lire respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
On note les coordonnée d'un point : (x ; y).

Concrètement, ces coordonnées représentent le chemin horizontal et vertical qui permet d'aller du point O origine du repère, au point dont on a les coordonnées.

EXEMPLE

Ici, le point A a pour coordonnées $x = 3$ et $y = 2$, ce qui signifie que pour aller du point O au point A, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 2 vers le haut.

A (3 ; 2)



2° Calcul de coordonnées dans un repère

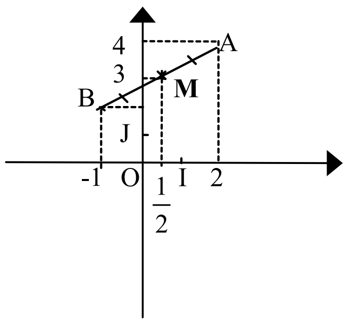
COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soient un point A de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et un point B de coordonnées $(x_B ; y_B)$. Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

EXEMPLE

Soient A (2 ; 4) et B (-1 ; 2).
Calculer les coordonnées de M, milieu de $[AB]$.



SOLUTION

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad x_M = \frac{2+(-1)}{2} \qquad x_M = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad y_M = \frac{4+2}{2} \qquad y_M = 3$$

Donc le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};3\right)$.

II. DISTANCE DANS UN REPERE ORTHONORME

1° Calcul de la longueur d'un segment

Soient un point A de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et un point B de coordonnées $(x_B ; y_B)$. La distance entre les points A et B (mesure de la longueur du segment $[AB]$) est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(2 ;4) et B(-1 ;2).
Calculer la distance AB.

SOLUTION

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-4)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$$
$$AB = \sqrt{9+4}$$
$$AB = \sqrt{13} \quad \text{(valeur exacte)}$$
$$AB \approx 3{,}6 \quad \text{(valeur approchée)}$$

2° Démontrer qu'un triangle est rectangle à l'aide des distances

Dans un repère orthonormé, pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on utilise souvent la réciproque du théorème de Pythagore. Les longueurs des trois côtés du triangle seront alors calculées à l'aide de la formule précédente.

EXEMPLE

Soit un repère orthonormé (O, I, J), et les points A(1 ; 2), B(0 ; 4) et C(4 ;3).
Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Justifier.

SOLUTION On applique la réciproque du théorème de Pythagore (voir chapitre VIII-Fonctions linéaires et affines), donc on calcule d'une part BC^2, et d'autre part $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$.

<u>Etape 1</u> :

$$\mathrm{BC}^2=\left(\sqrt{(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{B})^2+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{B})^2}\right)^2$$

$$\mathrm{BC}^2=(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{B})^2+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{B})^2$$

$$\mathrm{BC}^2=(4-0)^2+(3-4)^2 \qquad \mathrm{BC}^2=16+1 \qquad \mathrm{BC}^2=17$$

<u>Etape 2</u> :

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\underbrace{\left[(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2\right]}_{\mathrm{AB}^2}+\underbrace{\left[(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{A})^2\right]}_{\mathrm{AC}^2}$$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\left[(-1)^2+2^2\right]+\left[3^2+1^2\right]$$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=5+10 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=15.$$

$\Rightarrow$ On constate que $\mathrm{BC}^2\neq\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$; donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

> **<u>Remarque</u> :** la formule des distances est très simple à utiliser quand on veut calculer le carré d'une distance car la grande racine disparaît alors avec le carré.

III. EQUATION D'UNE DROITE DANS UN REPERE

1° Définitions

EQUATION D'UNE DROITE QUELCONQUE

Soit un repère (O, I, J) et une droite D non parallèle à l'axe des ordonnées. Alors les coordonnées (x; y) de tous les points de cette droite D vérifient une équation du type :

$$\boxed{y=\mathrm{a}x+\mathrm{b} \qquad \text{(avec a et b réels)}}$$

a est le coefficient directeur de la droite D   b est l'ordonnée à l'origine

$y=\mathrm{a}x+\mathrm{b}$ est l'équation de la droite D. Toute droite peut être caractérisée par une équation de ce type, et chaque droite distincte a une équation de droite distincte.

Remarque : une droite quelconque d'équation $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ correspond à la représentation graphique d'une fonction affine (voir chapitre VI).
Dans le cas où b est égal à 0, l'équation est alors de la forme $y = \mathrm{a}x$, et la droite correspond à la représentation graphique d'une fonction linéaire (cette droite passe alors par l'origine du repère).

EQUATION D'UNE DROITE PARALLELE À L'AXE DES ABSCISSES

Si une droite D est parallèle à l'axe des abscisses (droite horizontale), alors son coefficient directeur a est nul, et son équation est de la forme :

$$\boxed{y = \mathrm{b}}$$

Dans ce cas, tous les points de la droite, quelle que soit leur abscisse x, ont la même ordonnée y qui est égale à b.

EQUATION D'UNE DROITE PARALLELE À L'AXE DES ORDONNÉES

Si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale), alors son équation est de la forme :

$$\boxed{x = \mathrm{k}}$$

Dans ce cas, tous les points de la droite, quel que soit leur ordonnée y, ont la même abscisse x, qui est égale à k.

2° Propriétés

DROITES PARALLELES
Dans un repère quelconque, deux droites parallèles ont le même coefficient directeur a (le coefficient directeur représente la pente, ou encore l'inclinaison de la droite).

DROITES PERPENDICULAIRES
Dans un repère orthogonal, si deux droites D et D' sont perpendiculaires, alors leurs coefficients directeurs respectifs a et a' vérifient la relation :

$$\boxed{\mathrm{a} \times \mathrm{a}' = -1}$$

EXEMPLE

Soit D', une droite perpendiculaire à la droite D d'équation $y = 3x + 2$.
Calculer le coefficient directeur a' de la droite D'

SOLUTION Comme D et D' sont perpendiculaires, on a : $\mathrm{a} \times \mathrm{a}' = -1$.

Donc $3 \times \mathrm{a}' = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}' = -\frac{1}{3}$.

Le coefficient directeur de la droite D' est $-\frac{1}{3}$.

3°　　　Recherche de l'équation d'une droite

Calculer l'équation d'une droite D signifie déterminer son coefficient directeur a et son ordonnée à l'origine b. En général, on connaît les coordonnées de deux points de cette droite.

CALCUL DU COEFFICIENT DIRECTEUR

Quand on connaît les coordonnées de deux points $A(x_A\,;y_A)$, et $B(x_B;y_B)$, alors le coefficient directeur a de la droite (AB) est donné par :

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

CALCUL DE L'ORDONNEE À L'ORIGINE

Pour déterminer b, on choisit l'un des deux points de la droite (AB), et on remplace x et y dans l'équation, par les coordonnées du point choisi.

EXEMPLE

Soit un repère orthonormé (O, I, J), et les points A(2 ; -3) et B(1 ; 5).
Déterminer l'équation de la droite (AB).

SOLUTION

Etape 1 : Ecrire la forme générale de l'équation d'une droite.

$$y = ax + b$$

Etape 2 : Détermination du coefficient directeur a.
Pour cela, on applique la formule suivante :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ici, on a : $a = \frac{5-(-3)}{1-2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8}{(-1)} \quad \Rightarrow \quad a = -8$.

Etape 3 : On remplace a dans l'équation de droite par la valeur trouvée, et on obtient :

$$y = -8x + b$$

Etape 4 : Si on choisit A(2 ; -3), on a : $-3 = -8 \times 2 + b$

En résolvant l'équation, on obtient : $b = 13$.

$$\boxed{\text{Donc la droite (AB) a pour équation } y = -8x + 13.}$$

Chapitre VIII : FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

I. FONCTIONS LINEAIRES

1° Définition

La fonction linéaire de coefficient *a* associe à chaque nombre x son produit par *a*, c'est-à-dire *ax*. On dit alors que *ax* est l'image de *x*. On dit aussi que *x* est l'antécédent de *ax*.

nombre *x* $\xrightarrow{\boxed{\times a}}$ image *ax*

On note en général une fonction par la lettre *f*, et on dit alors que a*x* est l'image de *x* par la fonction *f*. On écrit alors : $f(x) = \mathrm{a}x$ (lire « *f* de *x* »).

EXEMPLE Soit la fonction linéaire *f* telle que $f(x) = 3x$ (ou encore, qui à *x*, associe le nombre 3*x*).
Calculer l'image de 5, puis de (-2).

$f(5) = 3\times 5 = 15$ Donc l'image de 5 par *f* est 15.
$f(\text{-}2) = 3\times(\text{-}2) = \text{-}6$ Donc l'image de -2 par *f* est -6.

2° Fonction linéaire et proportionnalité

EXEMPLE Soit la fonction linéaire $f(x) = 3x$
Par cette fonction, on peut calculer les images de différents nombres *x* et regrouper ces résultats dans un tableau de proportionnalité.

$\times 3$

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-6	0	3	6

On note :
$f(-2) = -6$ $f(0) = 0$
$f(1) = 3$ $f(2) = 6$

On remarque dans le tableau de proportionnalité précédent que pour $x = 0$, $f(x) = 0$. On note aussi $f(0) = 0$.

L'image de 0 par une fonction linéaire *f*, quelle qu'elle soit, est toujours 0.

3° Représentation graphique d'une fonction linéaire

- La représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = \mathrm{a}x$ est l'ensemble des points de coordonnées (*x* ; *f*(*x*)), soit (*x* ; a*x*).
- **En pratique, toute fonction linéaire est représentée par une droite qui passe par l'origine O du repère.**
- On dit que $y = \mathrm{a}x$ est **l'équation de la droite** qui représente graphiquement la fonction linéaire $f(x) = \mathrm{a}x$.
  a est alors appelé **coefficient directeur** de cette droite.

METHODE POUR REPRESENTER GRAPHIQUEMENT UNE FONCTION LINEAIRE

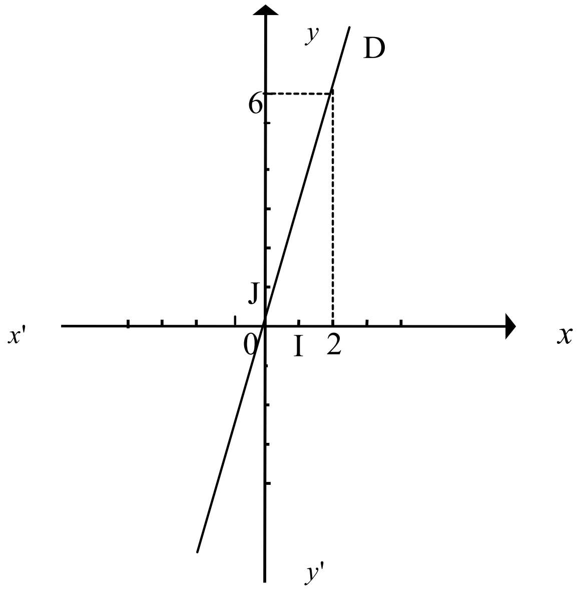
On sait que toute droite est définie par deux points.

f étant une fonction linéaire, sa représentation graphique passe par le point O (0 ; 0).

Pour tracer la droite D, représentation graphique de *f*, il faut donc trouver un deuxième point de la droite.
Pour cela, on choisit une valeur pour *x*, et on calcule son image par la fonction *f*.

EXEMPLE Soit la fonction linéaire $f(x) = 3x$. Représenter graphiquement *f*.

- *f* étant une fonction linéaire, sa représentation graphique passe par le point O (0 ; 0).
- si $x = 2$ alors $f(2) = 6$. Donc la droite D passe par le point de coordonnées (2 ; 6).



II. FONCTION AFFINE

1° Définition

Une fonction affine est une fonction qui, à tout nombre *x*, associie le nombre $ax + b$. On dit alors que $ax + b$ est l'image de *x* par la fonction affine *f*.

nombre $x \xrightarrow{\times a} ax \xrightarrow{+b}$ image $ax + b$

EXEMPLE Soit la fonction *f* définie par $f(x) = 3x - 5$.
Calculer les images de 2 et de 4 par la fonction *f*.
$f(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$
$f(4) = 3 \times 4 - 5 = 7$

2° Représentation graphique d'une fonction affine

- La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ est l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$), soit (x ; ax+b).
- Réciproquement, un point M (x ; y) appartient à la représentation graphique de la fonction f si ses coordonnées vérifient l'équation y = *f(x)*, c'est-à-dire si y = ax + b

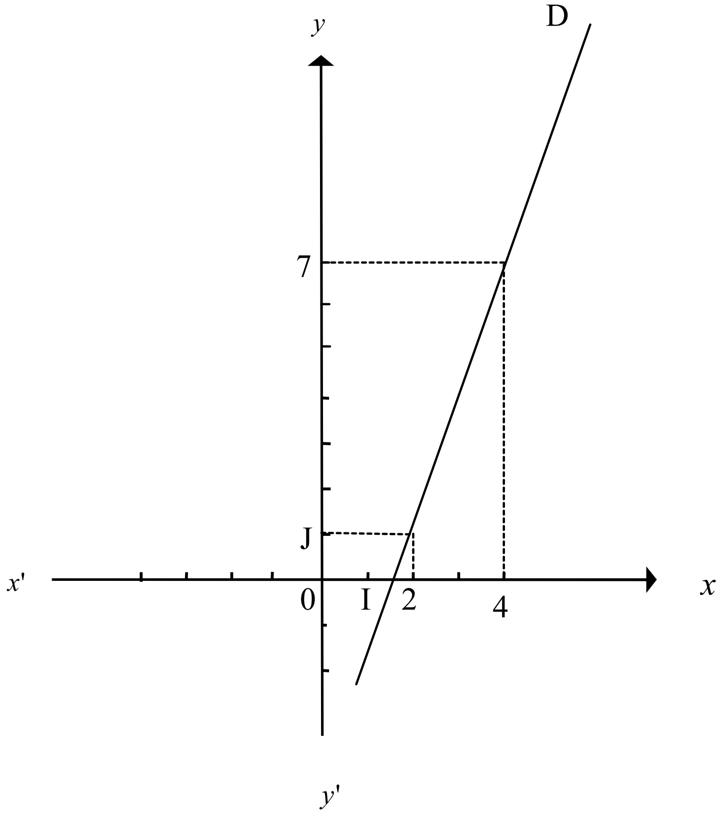
- **En pratique, toute fonction affine est représentée par une droite.**
- On dit que $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ est **l'équation de la droite** qui représente graphiquement la fonction affine $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$.
  a est alors appelé **coefficient directeur** de cette droite.
  b est appelé **ordonnée à l'origine**.
  Si b = 0, alors *f* est une fonction linéaire.

MÉTHODE POUR REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT UNE FONCTION AFFINE

On sait que toute droite est définie par deux points.

Il faut donc déterminer deux points, en fixant une valeur pour *x*, et en calculant son image par la fonction *f*.

EXEMPLE Soit la fonction affine $f(x) = 3x - 5$. Représenter graphiquement *f*.
Si $x = 2$ alors $f(2) = 1$
Donc la droite D passe par le point de coordonnées (2 ; 1).
Si $x = 4$ alors $f(4) = 7$
Donc la droite D passe par le point de coordonnées (4 ; 7).



Chapitre IX : STATISTIQUES

I. VOCABULAIRE DES STATISTIQUES

En statistiques, on étudie un ensemble appelé **population**, dont les éléments sont appelés **individus.**
A chaque individu, on associe un caractère statistique.

EXEMPLE Sur un arbre, on étudie la longueur de 12 feuilles.

Population :12 feuilles
Caractère : « longueur en mm de la feuille »

1° Caractère quantitatif discret

Un caractère quantitatif est **discret** lorsqu'il ne peut prendre que des valeurs isolées.

EXEMPLE

Sur les 12 feuilles observées, on a constaté que toutes les feuilles se répartissent uniquement entre les longueurs suivantes :

Longueur (en mm)	5	7	9	12
Effectif	4	3	2	3

2° Caractère quantitatif continu

Un caractère quantitatif est **continu** lorsqu'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

EXEMPLE

Sur les 12 feuilles observées, on a constaté que toutes les longueurs des feuilles se répartissent dans l'intervalle [5 mm ; 11 mm], avec les valeurs suivantes :
Longueur (en mm) : 5 ; 5,4 ; 6,2 ; 6,7 ; 7,1 ; 7,4 ; 7,8 ; 8,2 ; 8,5 ; 10,1 ; 10,2 ; 10,9
Ici, chaque feuille a une longueur différente. Donc l'effectif associé à chaque longueur est égal à 1.

Pour étudier cette population, on sera souvent amené à regrouper les longueurs en classes, afin de faciliter l'étude.

Regroupement en classes possibles :

Longueur (en mm)	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[
Effectif	4	5	3

II. DEFINITIONS ET CALCULS STATISTIQUES

1° Moyenne d'une série statistique

La moyenne d'une série statistique est donnée par la formule suivante :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{N}$$

Effectif total

où x_1 représente la première valeur du caractère quantitatif,
et n_1 l'effectif associé à cette valeur.

EXEMPLE

On observe la longueur en mm de 12 feuilles d'arbre :

Longueur (x)	5	7	9	12
Effectif (n)	4	3	2	3

Ici, N est égal à 12.

$\bar{x} = \dfrac{4\times5+3\times7+2\times9+3\times12}{12}$ donc $\bar{x} = \dfrac{95}{12}$

$\bar{x} = 7{,}9$ La longueur moyenne des feuilles est de 7,9 mm.

2° Médiane d'une série statistique

La médiane d'une série statistique est la valeur qui partage la série en deux effectifs égaux.

EXEMPLE 1

On reprend la série précédente de 12 feuilles, et on range les longueurs des 12 feuilles dans l'ordre croissant. Ici, N = 12, donc la médiane est égale à la moyenne de la 6^e et la 7^e valeur de l'effectif.

médiane

$$\underbrace{5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 7;\ 7;}_{\text{6 feuilles}} \quad \downarrow \quad \underbrace{7;\ 9;\ 9;\ 12;\ 12;\ 12}_{\text{6 feuilles}}$$

$$\boxed{\frac{n_6 + n_7}{2}}$$

$m = \dfrac{n_6 + n_7}{2} = \dfrac{7+7}{2} = 7$. Donc la médiane est égale à 7 mm.

EXEMPLE 2

Sur l'arbre étudié précédemment, on repère deux autres feuilles, l'une mesurant 13 mm et l'autre 15 mm. On inclut ces feuilles à la série étudiée. Donc l'effectif total N = 14. La médiane est égale à la moyenne de la 7^e et de la 8^e valeur de l'effectif.

$$\underbrace{5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 7;\ 7;\ 7}_{\text{7 feuilles}} \quad \overset{\text{médiane}}{\downarrow} \quad \underbrace{9;\ 9;\ 12;\ 12;\ 12;\ 13;\ 15}_{\text{7 feuilles}}$$

$m = \dfrac{n_7 + n_8}{2} = \dfrac{7+9}{2} = 8$. La médiane est égale à 8 mm.

EXEMPLE 3

On reprend le premier échantillon de 12 feuilles, à l'exception de 2 feuilles de 7 mm, et d'une autre de 5 mm, qui se sont envolées lors d'un coup de vent.
Donc l'effectif total est N = 9.

$$\underbrace{5;\ 5;\ 5;\ 7}_{\text{4 feuilles}} \quad \overset{\text{médiane}}{9} \quad \underbrace{9;\ 12;\ 12;\ 12}_{\text{4 feuilles}}$$

Ici, la médiane est 9, car c'est la 5^e^ valeur qui partage l'effectif en deux parties égales de 4 feuilles.

Le **premier quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins 25% (le quart) des valeurs lui soient inférieurs ou égales.
Le **troisième quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins 75% (les trois quarts) des valeurs lui soient inférieurs ou égales.

EXEMPLE 4

On reprend le premier échantillon de 12 feuilles.
Le premier quartile est donné par la valeur 5. Le troisième quartile est donné par la valeur 9.

3° Mode d'une série statistique

Le mode d'une série statistique est la valeur qui est la plus représentée, c'est-à-dire celle qui a le plus grand effectif.

EXEMPLE

Reprenons la série statistique précédente de 12 feuilles.

Longueur *(x)*	5	7	9	12
Effectif *(n)*	4	3	2	3

Ici, le mode est égal à 5 mm (effectif le plus grand).

4° Etendue

L'étendue d'une série statistique est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite valeur prises par cette série.

III. EFFECTIFS ET FREQUENCES

1° Effectifs cumulés

Lorsque le caractère est continu, on range les valeurs par ordre croissant ; l'effectif cumulé jusqu'à la valeur k est la somme des effectifs pour toutes les valeurs du caractère inférieures ou égales à k.

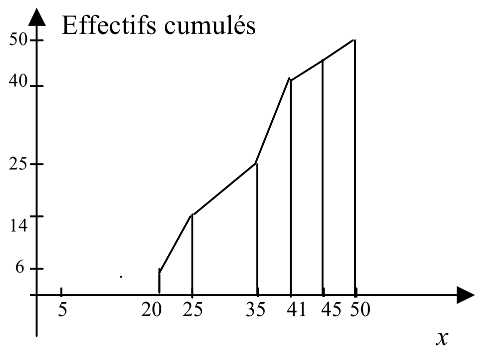
EXEMPLE Une enquête de consommation relève les prix d'un même objet dans 50 magasins différents.

Prix en euros (x)	20	25	35	41	45	50
Effectifs (n)	**6**	**8**	**11**	15	6	4
Effectifs cumulés croissants	6	14	**25**	40	46	**50**

25 = 6 + 8 + 11

La dernière valeur des effectifs cumulés est égale à l'effectif total.

On peut alors construire le **polygone des effectifs cumulés croissants** :



<u>Remarque</u> : on peut également calculer les effectifs cumulés décroissants. Dans ce cas, on procède de la même façon que pour le calcul des effectifs cumulés croissants, **mais en commençant par la droite du tableau statistique.**

2° Fréquences – Fréquences cumulées

Pour chaque valeur x de la série statistique, on peut calculer la fréquence f associée à cette valeur :

$$f = \frac{n}{N}$$

n → Effectif associé à la valeur x dont on cherche la fréquence

f → Fréquence

N → Effectif total

<u>Remarque 1</u> : La somme de toutes les fréquences d'une série statistique est égale à 1.

<u>Remarque 2</u> : on peut également calculer les fréquences cumulées croissantes ou décroissantes. Pour cela, on procède de la même façon que pour le calcul des effectifs cumulés.

EXEMPLE
On reprend la série statistique précédente. Ici, l'effectif total N est égal à 50.

$f_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{6}{50} = 0{,}12$

Prix en euros (x)	20	25	35	41	45	50	Total
Effectifs (n)	6	8	11	15	6	4	**50**
Fréquences (f)	**0,12**	**0,16**	**0,22**	**0,3**	**0,12**	**0,08**	**1**
Fréquences cumulées croissantes	0,12	0,28	**0,5**	0,8	0,92	**1**	

0,5 = 0,12 + 0,16 + 0,22

La dernière valeur des fréquences cumulées est égale à 1.

IV. PROBABILITE D'UN EVENEMENT

1° Définition

La probabilité d'un évènement E est un nombre compris entre 0 et 1.
Si cet évènement a 80% de chance de se produire, il a une probabilité de 0,8.
On écrit p(E) = 0,8, ce qui se lit « p de E est égal à 0,8. »

Un évènement qui se produit à chaque fois est appelé évènement certain et sa probabilité est 1.
Un évènement qui ne se produit jamais est appelé évènement impossible et sa probabilité est 0.

2° Propriété

Lorsque l'on peut déterminer tous les évènement possibles, la probabilité d'un évènement est donné par : $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

EXEMPLE

On tire une boule au hasard dans une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules jaunes.
Soir R l'évènement « tirer une boule rouge ». Il y a 8 boules en tout, dont 3 rouges.
La probabilité de cet évènement est $p(R) = \frac{3}{8}$.

V. PROBABILITE DE PLUSIEURS EVENEMENTS

1° Définitions

Si A et B sont 2 évènements, l'évènement « A et B » est l'évènement qui se produit lorsque les évènements A et B ont lieu simultanément.

EXEMPLE 1

Lors du lancer d'un dé, on note P l'évènement « tirer un nombre pair » et N l'évènement « tirer un nombre supérieur ou égal à 4 ». L'évènement « P et N » correspond à tirer un nombre pair supérieur ou égal à 4, soit les chiffres 4 ou 6.
Si A et B sont 2 évènements, l'évènement « A ou B » est l'évènement qui se produit lorsque l'un des deux évènements, ou les deux, se produisent.

EXEMPLE 2

Dans le cas du lancé de dé, l'évènement « P ou N » correspond à tirer les chiffres 2, 4, 5 ou 6.
Deux évènements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

EXEMPLE 3 Dans le cas du lancer de dé, l'évènement « tirer 3 » et « tirer un nombre pair » sont incompatibles.

EXEMPLE 4

Dans le cas du lancer de dé, l'évènement « tirer un nombre impair » est l'évènement contraire de « tirer un nombre pair ».

2° Propriétés

Lorsque deux évènements A et B sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se produise est égal à : p(A ou B) = p(A) + p(B).
Deux évènements contraires sont incompatibles et la somme de leur probabilité vaut 1.

<u>Chapitre X :</u> RAPPELS DE GEOMETRIE ET THEOREME DE THALES

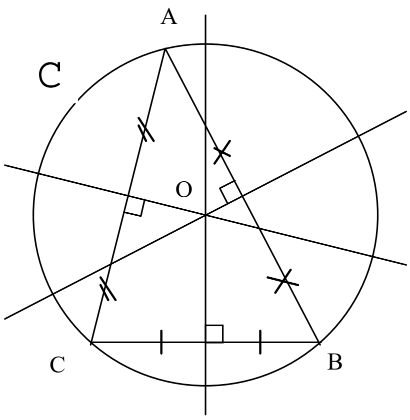
I. DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE

1° Médiatrices d'un triangle

DEFINITION
Dans un triangle, la médiatrice d'un côté est la droite qui coupe ce côté <u>perpendiculairement</u> et en son <u>milieu</u>.

PROPRIETE 1
La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points situés à égale distance des extrémités de ce segment.

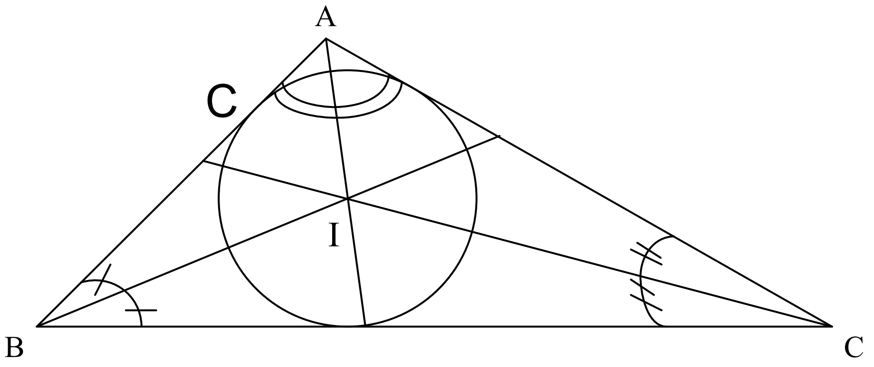
PROPRIETE 2
Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un même point appelé centre du cercle circonscrit au triangle (le cercle circonscrit au triangle est un cercle qui passe par les trois sommets du triangle).



2° Bissectrices d'un triangle

DEFINITION
La bissectrice d'un <u>angle</u> est la demi-droite issue du sommet de l'angle et qui le partage en <u>deux angles égaux</u>.

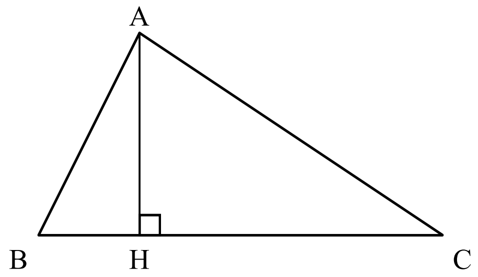
PROPRIETE
Dans un triangle, les bissectrices des 3 angles se coupent en un même point appelé centre du cercle inscrit au triangle.

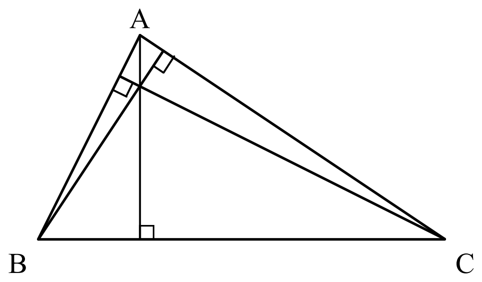


3° Hauteurs d'un triangle

DEFINITION
La hauteur d'un triangle est la droite issue d'un sommet qui coupe le côté opposé perpendiculairement.

(AH) est la hauteur issue de A.
H est le **pied de la hauteur**.





PROPRIETE 1
Dans un triangle, les trois hauteurs issues des sommets coupent en un même point appelé orthocentre.

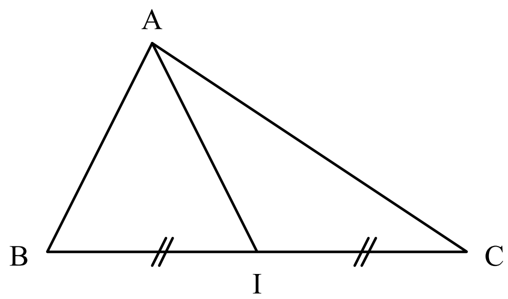
PROPRIETE 2

La mesure de la hauteur permet de calculer l'aire du triangle : A $= \frac{1}{2} \times Base \times Hauteur$

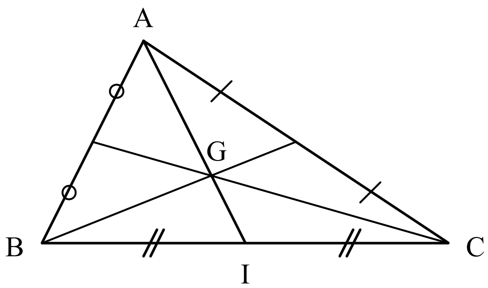
4° Médianes d'un triangle

DEFINITION
La médiane d'un triangle est la droite issue du sommet et coupant le côté opposé en son milieu.

(AI) est la médiane de ABC issue de A.



PROPRIETE
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point appelé **centre de gravité** du triangle.
Ce point est situé aux 2/3 du sommet du triangle :
$AG = \frac{2}{3}AI$



II. TRIANGLES PARTICULIERS (RAPPELS)

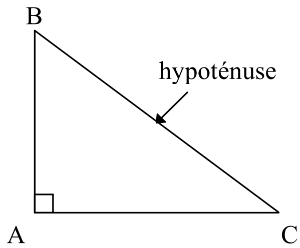
1° Triangle rectangle

DEFINITION
Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.

PROPRIETE 1 : AIRE ET TRIANGLE RECTANGLE
Dans un triangle rectangle, deux des trois hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.
⇒ Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle, on utilise donc la formule ci-dessous.

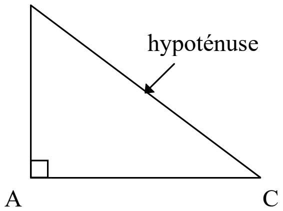
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC$

Avec [AB] et [AC] côtés de l'angle droit.



PROPRIETE 2 : THEOREME DE PYTHAGORE
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Remarque : ceci permet de calculer le troisième côté d'un triangle rectangle si l'on en connaît déjà deux.

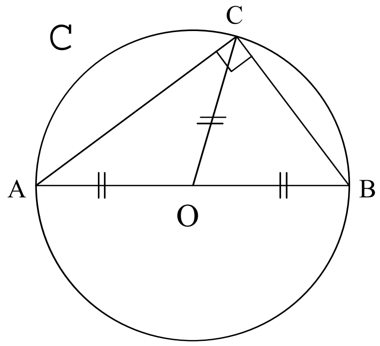
RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE
Si dans un triangle, le carré du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.



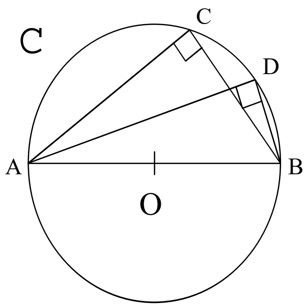
THEOREME
Hypothèse : le triangle ABC est rectangle en A.
Conclusion : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

RECIPROQUE
Hypothèse : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Conclusion : le triangle ABC est rectangle en A.

PROPRIETE 3 : CERCLE CIRCONSCRIT ET TRIANGLE RECTANGLE
Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
L'hypoténuse est donc le diamètre du cercle circonscrit, et la médiane issue de l'angle droit est un rayon.



RECIPROQUE DE LA PROPRIETE 3
Un triangle dont un des côtés est le diamètre de son cercle circonscrit est un triangle rectangle. Le diamètre est l'hypoténuse du triangle.



2° Triangle isocèle

DEFINITION
Un triangle isocèle est un triangle qui a **deux côtés égaux et deux angles égaux.**

PROPRIETE
Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur, la bissectrice et la médiatrice du côté opposé. Cette droite constitue l'axe de symétrie du triangle.

3° Triangle équilatéral

DEFINITION
Un triangle équilatéral est un triangle dont les **trois côtés sont égaux et les trois angles aussi.**
Chaque angle mesure donc 60°.

PROPRIETE
Dans un triangle équilatéral, les médianes, hauteurs, bissectrices et médiatrices sont confondues. Ces droites constituent alors les trois axes de symétrie du triangle.
Par conséquent, le centre de gravité, l'orthocentre, et les centres du cercle inscrit et circonscrit, sont confondus.

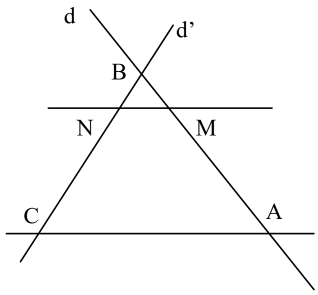
III. THEOREME DE THALES

1° Le théorème

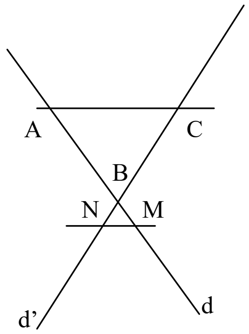
Soient deux droites d et d', sécantes en B et deux droites parallèles qui coupent respectivement d et d' en A et M, et C et N.

Si
1) A et M sont distincts de B
2) C et N sont distincts de B
3) (MN) et (AC) sont parallèles

alors on a : $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$



Configuration « triangle »



Configuration « papillon »

QUAND APPLIQUER LE THEOREME DE THALES ? **1) Pour calculer la mesure d'un segment dans l'une des deux configurations ci-dessus.** **2) Pour calculer un rapport de type** $\frac{MN}{AC}$ **et uniquement si les conditions 1), 2), 3) du théorème sont vérifiées.**

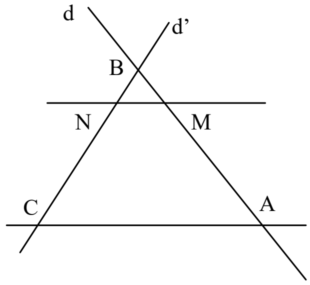
2° La réciproque

Soient deux droites d et d', sécantes en B et deux droites qui coupent respectivement d et d' en A et M, et C et N.

Si : 1) $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$

2) B, N, C alignés et B, M , A alignés dans le même ordre

alors les droites (NM) et (CA) sont parallèles.



QUAND APPLIQUER LA RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES ? Uniquement pour démontrer que deux droites sont parallèles, et à condition de pouvoir prouver l'égalité de deux des fractions au moins, sur les trois ci-dessus.

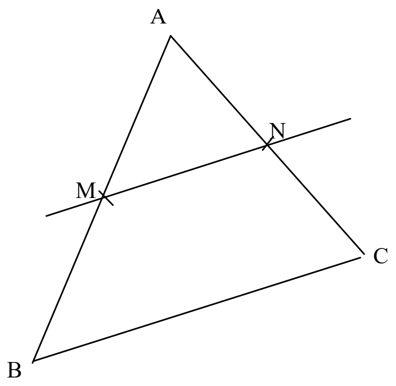
EXEMPLE

Soit un triangle ABC, M, un point du segment $[AB]$ tel que AM = 3 et N, un point du segment $[AC]$ tel que AN = 2.

AB = 6.

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Calculer AC.



SOLUTION

Etape 1 : dans le triangle ABC, on a :

- A, M et B alignés
- A, N et C alignés
- les droites (BC) et (MN) parallèles

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, et on a alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Etape 2 :

Comme on cherche à calculer AC, on choisit parmi ces trois rapports une fraction contenant l'inconnue AC, et une fraction contenant des segments dont on connaît la mesure.

On écrit alors : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

Etape 3 :

On place l'inconnue AC en haut à gauche du calcul, puis on remplace les autres mesures par les valeurs données dans l'énoncé :

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$$

$$\frac{AC}{2} = \frac{6}{3}$$

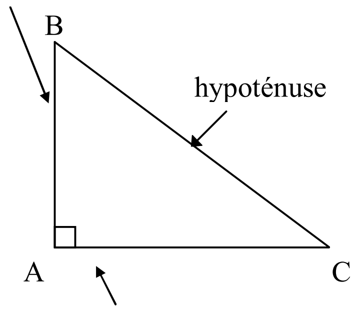
$$AC = \frac{6}{3} \times 2$$

$$\underline{AC = 4}$$

Chapitre XI : TRIGONOMETRIE ET TRIANGLE RECTANGLE

I. RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

1° Cosinus d'un angle



DEFINITION
Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le cosinus de l'angle $\hat{C}$, noté $\cos\hat{C}$, par :

$$\cos\hat{C} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

2° Sinus d'un angle

DEFINITION
Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit le sinus de l'angle $\hat{C}$, noté $\sin\hat{C}$, par :

$$\sin\hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

PROPRIETE
Dans un triangle ABC rectangle en A le sinus et le cosinus des angles sont liés par la relation suivante :

$\sin\hat{C} = \cos\hat{B}$.

3° Tangente d'un angle

DEFINITION
Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit la tangente de l'angle $\hat{C}$, notée $\tan\hat{C}$ par :

$$\tan\hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$

4° Formules de trigonométrie

Dans un triangle rectangle, si x désigne la mesure de l'un des angles aigus :

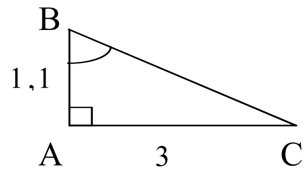
$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

II. UTILISATION DE LA TRIGONOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

1° Pour calculer la mesure d'un angle

EXEMPLE ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 1,1 cm et AC = 3 cm.
Calculer la mesure de l'angle $\hat{B}$.



SOLUTION

Etape 1 :
Le segment $[AC]$ est le côté opposé à l'angle $\hat{B}$.
Le segment $[AB]$ est le côté adjacent à l'angle $\hat{B}$.
On utilisera donc la formule de la tangente pour calculer l'angle $\hat{B}$.

Etape 2 :

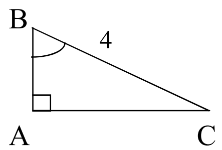
$$\tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{3}{1{,}1} \qquad \tan \hat{B} = \frac{30}{11} = 2{,}727$$

Etape 3 : On utilise la touche $\tan^{-1}$ de la calculatrice pour obtenir la mesure en degrés de l'angle $\hat{B}$.
Ici, $\hat{B} = 69{,}8°$

2° Pour calculer la mesure d'un côté

EXEMPLE ABC est un triangle rectangle en A tel que BC = 4 cm et $\hat{B} = 35°$
Calculer la mesure du côté AC.



SOLUTION

Etape 1 : $[AC]$ est le côté opposé à l'angle $\hat{B}$.
$[BC]$ est l'hypoténuse du triangle.
On utilisera donc la formule du sinus pour calculer AC.

Etape 2 : $\sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$ $\qquad \frac{AC}{BC} = \sin \hat{B}$

donc

$$AC = \sin \hat{B} \times BC$$
$$AC = 4 \times \sin 35$$
$$AC = 2{,}3 \text{ cm.}$$

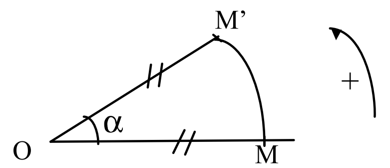
Chapitre XII : ROTATIONS – ANGLES – POLYGONES REGULIERS

I. ROTATIONS

1° Définition

Une rotation est caractérisée par un centre, un angle, et un sens de rotation.
L'image d'un point M par la rotation de centre O, d'angle α et de sens positif (sens de la flèche), est le point M', tel que :

- $OM = OM'$
- $M\hat{O}M' = \alpha$



Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Le sens négatif est le sens des aiguilles d'une montre.

2° Propriétés

Le seul point invariant par une rotation est le centre de cette rotation.

La rotation conserve :
- les longueurs
- l'alignement des points
- les angles
- les aires

Par une rotation, l'image :
- d'une droite est une droite.
- d'un segment est un segment de même longueur.
- d'une figure géométrique est une figure géométrique de même nature.
- d'un cercle de centre I est un cercle de même rayon, dont le centre est l'image du centre I par la rotation.

II. ANGLES INSCRITS DANS UN CERCLE

1° Définitions

ANGLE INSCRIT

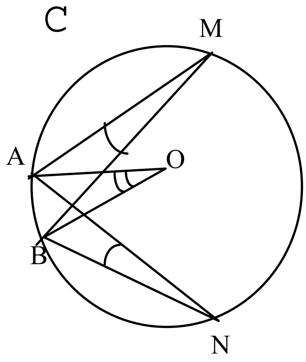
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. On dit qu'un angle $A\hat{M}B$ est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ lorsque son sommet M appartient au cercle et lorsque ses côtés $[MA]$ et $[MB]$ sont des cordes du cercle $\mathcal{C}$.

Sur la figure ci-dessous, $A\hat{M}B$ et $A\hat{N}B$ sont des angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$.

ANGLE AU CENTRE
Pour chaque angle inscrit dans un cercle, il existe un angle au centre associé à cet angle. L'angle au centre est l'angle qui intercepte le même arc que son angle inscrit, mais qui a pour sommet le centre du cercle.

Ici, l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé aux angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ car ces trois angles interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

2° Propriétés des angles inscrits



La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre associé.

Ici, on a :

$$\boxed{\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2}\times\widehat{AOB}}$$

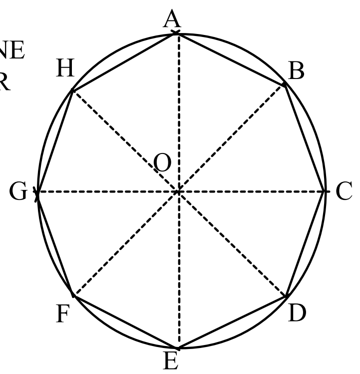
Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont même mesure.

III. POLYGONES REGULIERS

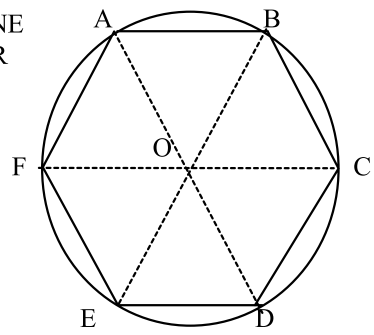
1° Définition

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

OCTOGONE REGULIER



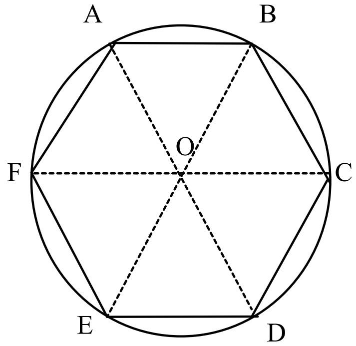
HEXAGONE REGULIER



2° Propriétés

CERCLE CIRCONSCRIT ET POLYGONE REGULIER
Pour tout polygone régulier, il existe un cercle $\mathcal{C}$ passant par tous les sommets du polygone, et de centre O. Ce cercle est appelé cercle circonscrit au polygone et on dit que son centre O est le centre du polygone.

ROTATION ET POLYGONE REGULIER
Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier de centre O, la rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOB}$ dans un sens quelconque, transforme le polygone régulier en lui-même.



ANGLE AU CENTRE D'UN POLYGONE REGULIER

Tous les angles au centre d'un polygone régulier ont la même mesure.

Ici, on a : $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA}$

3° Méthode pour construire un polygone régulier

Pour construire facilement un polygone régulier, on utilise souvent les propriétés précédentes.

a - <u>A l'aide du cercle circonscrit</u>

EXEMPLE

Construire un hexagone régulier de centre O et de rayon 4 cm.

SOLUTION
<u>Etape 1</u> : Au compas, on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OC = 4 cm.

<u>Etape 2</u> : Un hexagone possédant 6 côtés, on divise l'angle de 360° en 6 angles égaux.

Ici, on a : $\frac{360}{6} = 60^\circ$.

Donc chaque angle au centre de l'hexagone mesure 60°.

<u>Etape 3</u> : A l'aide du rapporteur, on trace les 6 angles au centre de 60°.

<u>Etape 4</u> : Les six sommets de l'hexagone ABCDEF sont les points d'intersection entre les demi-droites issues de O, et le cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

b - A l'aide d'une rotation

EXEMPLE

Construire un octogone régulier de côté 1,2 cm.

SOLUTION AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 1,2 cm.

Etape 1 : On calcule la mesure de l'angle $A\hat{B}C$:

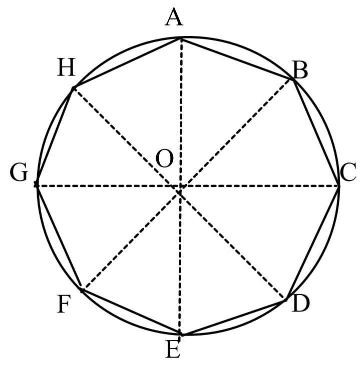
Dans le triangle ABO isocèle en O, l'angle au centre $A\hat{O}B$ mesure $\frac{360}{8} = 45^\circ$.

Donc

les angles $A\hat{B}O$ et $B\hat{A}O$ mesurent :

$\frac{1}{2}(180 - 45) = 67{,}5°$

Donc $A\hat{B}C = 2 \times 67{,}5 = 135°$



Etape 2 : On construit le sommet C à l'aide d'une rotation : C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle 135°.

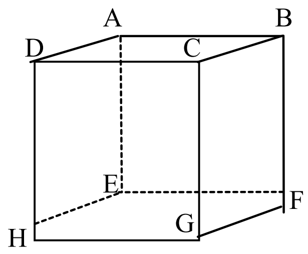
Etape 3 : De même, on construit ensuite les sommets D, E, F, G, H, par une rotation d'angle 135°.

Chapitre XIII : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. SOLIDES USUELS

1° Prisme droit (rappel)

DEFINITION
Un prisme droit est un solide, qui possède :
- deux bases parallèles superposables
- des arêtes latérales parallèles et égales, qui sont également perpendiculaires à la base



Prismes droits usuels :
- cube
- parallélépipède rectangle
- cylindre

VOLUME D'UN PRISME DROIT
Le volume d'un prisme droit est donné par la formule suivante :

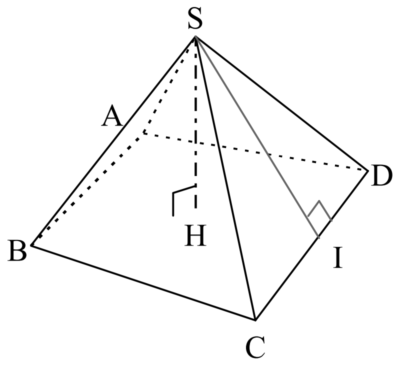
$$V = B \times h$$

B est l'aire de la base

h est la hauteur du prisme, c'est-à-dire l'arête latérale

2° Pyramide régulière

DEFINITION
Une pyramide est un solide limité par une base polygonale et des faces triangulaires dont les hauteurs issues du sommet sont appelées **apothèmes**.
Une pyramide est dite **régulière** lorsque le polygone de base est régulier et que la hauteur issue du sommet passe par le centre du cercle circonscrit au polygone de base.



S est le sommet.
[SH] est la hauteur.
ABCD est la base.
ABS, BCS, CDS et ADS sont des faces.
[SI] est un apothème.

VOLUME ET AIRE LATERALE

Volume

Le volume de la pyramide, est donné par la formule :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h}$$

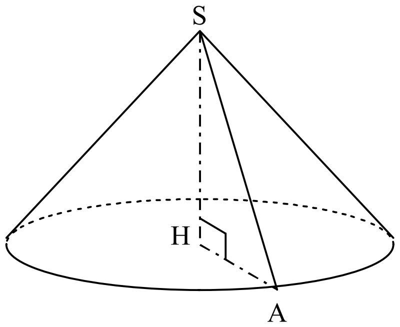
où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base polygonale et h est la hauteur de la pyramide.

Aire latérale

L'aire latérale est la somme des surfaces de tous les côtés de la pyramide.
On calcule donc l'aire d'une des faces triangulaires, puis on multiplie cette aire par le nombre de faces triangulaires de la pyramide.
Puis on ajoute l'aire de la base.

3° Cône de révolution

DEFINITION
Un cône de révolution est une « pyramide » à base circulaire.
C'est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.
Le segment joignant le sommet à un point du cercle de la base est appelé **génératrice**, c'est aussi l'hypoténuse du triangle rectangle générateur.
La hauteur joint le sommet au centre du cercle de la base.



VOLUME ET AIRE LATERALE

Volume

Le volume du cône, comme pour celui de la pyramide, est donné par la formule :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h}$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base circulaire, soit : πR^2
et h est la hauteur du cône.

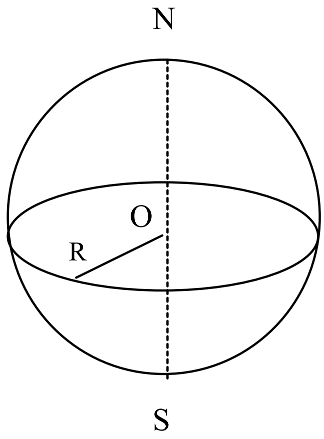
Aire latérale

Pour les cônes de révolution la surface vaut :

$$\boxed{S = \pi . g \times R}$$

où g est la longueur de la génératrice.
et R est le rayon du cercle de base.

4°   Sphère et boule



DEFINITION

- La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R.

- La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $OM \leq R$.

VOLUME ET AIRE LATERALE

Le volume d'une boule est donné par la formule :

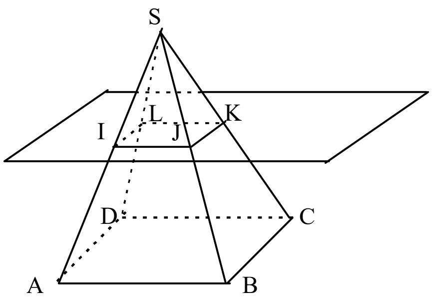
$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

L'aire latérale d'une sphère est donnée par la formule :

$$A = 4 \times \pi \times R^2$$

II. SECTION D'UN SOLIDE PAR UN PLAN

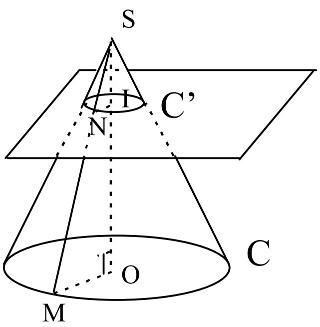
1° Section d'une pyramide par un plan



PROPRIETE
La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que la base : ses côtés sont parallèles à ceux de la base.

Ici, ABCD est un parallélogramme et IJKL est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à ceux de ABCD.

Section d'un cône par un plan



PROPRIETE
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle C' dont le centre appartient à la hauteur du cône.
Ainsi, on a O, I et S alignés.

2° Notions d'agrandissement et de réduction

DEFINITIONS

Lorsqu'on coupe une pyramide ou un cône de révolution par un plan parallèle à la base, on obtient sur la partie supérieure de la figure une pyramide ou un cône de révolution réduits.
Ainsi, dans les deux paragraphes précédents :
- la pyramide SIJKL est une réduction de la pyramide SABCD (où SABCD est un agrandissement de SIJKL).
- le cône de base C' est une réduction du cône de base C (où le cône de base C est un agrandissement du cône de base C').

COEFFICIENT D'AGRANDISSEMENT / DE RÉDUCTION
<u>Coefficient de réduction</u> :

$$r = \frac{\text{valeur réduite}}{\text{valeur réelle}}$$

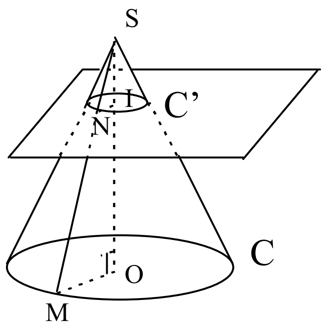
Coefficient d'agrandissement :

$$\mathbf{r'} = \frac{\text{valeur agrandie}}{\text{valeur réelle}}$$

EXEMPLE

Sur la figure ci-dessous, le plan P parallèle à la base coupe le cône de base C selon un disque C' de centre I.
On donne IN = 0,8, OM = 1,6 et OS = 6,2.

1) Sachant que le cône de base C' est une réduction du cône de base C, calculer le coefficient de réduction r.
2) Sachant que le cône de base C est un agrandissement du cône de base C', calculer le coefficient d'agrandissement r'.



1) $r = \frac{\text{valeur réduite}}{\text{valeur réelle}} = \frac{\text{petit rayon}}{\text{grand rayon}} = \frac{IN}{OM}$

donc $r = \frac{0{,}8}{1{,}6} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

2) $r' = \frac{\text{valeur agrandie}}{\text{valeur réelle}} = \frac{\text{grand rayon}}{\text{petit rayon}} = \frac{OM}{IN}$

donc $r' = \frac{1{,}6}{0{,}8} = 2$.

Le cône de hauteur $[IS]$ est une réduction du cône de hauteur $[OS]$ à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Le cône de hauteur $[OS]$ est un agrandissement du cône de hauteur $[IS]$ à l'échelle 2.

CALCUL D'UNE LONGUEUR DANS UNE REDUCTION / AGRANDISSEMENT

Dans une réduction / agrandissement, toute longueur de la figure réduite / agrandie peut s'obtenir en multipliant la longueur correspondante de la figure de départ par le coefficient de réduction / agrandissement.

⇒ **Quand on connaît une longueur du solide de départ, on peut calculer la longueur correspondante du solide réduit à l'aide du coefficient de réduction.**

EXEMPLE

Ainsi, dans la figure précédente, on a :

OS = 6,2 cm et le coefficient de réduction $r = \frac{1}{2}$.

Calculons la hauteur IS du petit cône.

Comme le cône de hauteur $[IS]$ est une réduction du cône de hauteur $[OS]$, on a :

$IS = OS \times r \quad \Rightarrow \quad IS = OS \times \frac{1}{2}$

$IS = 6{,}2 \times \frac{1}{2}$ donc $IS = 3{,}1\,\text{cm}$.

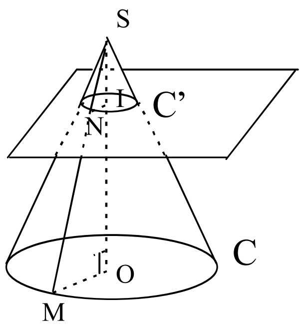
CALCUL D'AIRE ET DE VOLUME DANS UNE REDUCTION / AGRANDISSEMENT

Dans une réduction / agrandissement, on obtient :

- l'aire de la figure réduite / agrandie en multipliant l'aire de la figure de départ par le coefficient de réduction / agrandissement **<u>élevé au carré</u>**.

- le volume de la figure réduite / agrandie en multipliant le volume de la figure de départ par le coefficient de réduction / agrandissement **<u>élevé au cube</u>**.

EXEMPLE



Soit la même figure que précédemment avec IN = 0,8, OM = 1,6 cm et OS = 6,2 cm.

Le coefficient de réduction $r = \frac{1}{2}$

1. Calculer l'aire du disque de rayon $[OM]$. En déduire l'aire du disque de rayon $[IN]$.
2. Calculer le volume du grand cône. En déduire le volume du petit cône.

SOLUTION

1. <u>Aire du disque de rayon</u> $[OM]$:

$A_1 = \pi \times r^2 \qquad A_1 = \pi \times 1{,}6^2 \qquad A_1 = 8{,}04 \text{ cm}^2$

<u>Aire du disque de rayon</u> $[IN]$:

$A_2 = \pi \times r^2 \qquad A_2 = \pi \times 0{,}8^2 \qquad A_2 = 2{,}01 \text{ cm}^2$

2. <u>Volume du grand cône</u> :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h \qquad V = \frac{1}{3} \times 8{,}04 \times 6{,}2 = 16{,}61 \text{ cm}^3$

<u>Volume du petit cône</u> :

$V' = V \times r^3 \qquad V' = 16{,}61 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad V' = 2{,}08 \text{ cm}$

Partie B : EXERCICES

-  : exercices d'application directe du cours.
-  : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
-  : exercices plus difficiles ou plus longs.

Chapitre I : CALCUL ALGEBRIQUE (RAPPELS)

EXERCICE 1.1
Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$A=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}-4\right)$ $\quad B=\dfrac{25}{4}-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{8}{9}+\dfrac{2}{9}$

$C=\dfrac{40}{24}-4+\dfrac{7}{9}$ $\quad D=\left(\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{14}\right)\times\dfrac{21}{5}$

$E=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{-5}{3}+\dfrac{1}{12}-3$ $\quad F=-38\times\dfrac{5}{19}+\dfrac{8}{-3}\times 9$

EXERCICE 1.2 - CORRIGE -
Même exercice :

$A=\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3}-1$ $\quad B=\dfrac{3}{20}+\dfrac{11}{5}-\dfrac{2}{15}+3$

$C=\dfrac{8}{17}-\dfrac{1}{34}+\dfrac{3}{68}$ $\quad D=25\times\dfrac{4}{27}-\dfrac{2}{9}+2$

$E=\dfrac{20}{28}-\dfrac{3}{7}+\left(-\dfrac{30}{7}\right)$ $\quad F=\dfrac{3}{10}-2+\dfrac{600}{50}$

EXERCICE 1.3 - Calculer :

$A=\dfrac{3}{16}+\dfrac{5}{24}+\dfrac{9}{12}$ $\quad B=\dfrac{7}{50}-\dfrac{2}{25}-\dfrac{11}{10}$

$C=\dfrac{-2}{9}\times\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{14}\times\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{-7}+\dfrac{1}{14}\right)-\dfrac{5}{21}$

$D=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{10}{2}-\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{7}\right)$

$E=\left(\dfrac{7}{15}-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{17}{9}-\dfrac{4}{18}\right)+\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\right)$

$F=\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}+2\right)\div\left(\dfrac{8}{3}+\dfrac{7}{6}-1\right)$

EXERCICE 1.4 - CORRIGE -
Calculer :

$A=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$ $\quad B=\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}\right)\left(\dfrac{\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{5}{7}-\dfrac{7}{5}}\right)$

$C=\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}}\right)\left(\dfrac{\dfrac{4}{15}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}}\right)$ $\quad D=3-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}$

$E=\dfrac{3-\dfrac{2}{9}}{4+\dfrac{1}{6}}$ $\quad F=\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{4}{7}}\times\dfrac{10}{14}$

EXERCICE 1.5 - Simplifier en appliquant les règles de puissances. Donner le résultat sous la forme a^n ou $-a^n$ (avec a nombre premier) dès que possible, sinon, le mettre sous la forme $a^n\times b^p$:

$A=2^4\times 4^3$ $\quad B=3^5\times 3^{-2}$

$C=9^8\times 3^{-12}$ $\quad D=8^7\times 16^2$

$E=24^5\times 12^6$ $\quad F=4^3\times 2^{-2}$

$G=32^5\times 8^6$ $\quad H=0{,}5^4\times 25^2$

$I=(-3)^3$ $\quad J=(-7)^4\times 7^2$

$K=2^{12}\times(-2)^7$ $\quad L=-2^4\times 4^2\times 8^{-1}$

$M=-3\times(-3)^2\times 3^{-2}$ $\quad N=5^{-4}\times 125^2$

EXERCICE 1.6 - Même exercice :

$A=(-2)^{-5}\times 4^6$ $\quad B=(-9)^2\times 27\times 3^{-5}$

$C=\dfrac{2^{12}\times 5^{-4}}{8^3\times 10^{-3}}$ $\quad D=\dfrac{-5^3}{(-5)^2}\times 25^6\times\dfrac{1}{5^{14}}$

$E=0{,}001\times 10^5\times\dfrac{1}{10}$ $\quad F=\dfrac{14^3}{(-7)^6}\times 49^5\times(-7)^3$

EXERCICE 1.7 - CORRIGE -
Simplifier en appliquant les règles de puissances (on décomposera d'abord chaque nombre en produit de facteurs premiers):

$A=9^2\times 12^3\times 6^2$ $\quad B=15^4\times 8^3\times 5^{-2}$

$C=\dfrac{18^3\times 4^2\times 12^{-4}}{20^5\times 60^3\times 4^{-2}}$ $\quad D=\dfrac{50^4\times 16^2}{25^2\times 12^5}$

$E=\dfrac{2^5\times 9^6\times 10^4}{15^3\times 6^6}$ $\quad F=\dfrac{10^5}{8^3}\times 4^{-3}\times\dfrac{16}{20^4}$

EXERCICE 1.8 - CORRIGE -
Ecrire les nombres suivants en écriture scientifique :

$A=5000$ $\quad B=0{,}0012$

$C=642{,}13$ $\quad D=45\times 10^4$

$E=\dfrac{1}{4}$ $\quad F=0{,}000009$

$G=10{,}1\times 0{,}001$ $\quad H=314{,}5\times 10^{-2}$

$I=\dfrac{1}{10^9}\times 14$ $\quad J=0{,}02\times 100$

$K=\dfrac{350}{10^8}$ $\quad L=22{,}4\div 0{,}001$

$M=0{,}008\times 10^{24}$ $\quad N=500\times 10^{13}$

EXERCICE 1.9 - Simplifier puis donner le résultat en écriture scientifique :

$$A=\frac{0{,}6^3\times 400\times 0{,}03^5}{0{,}004^5\times 10^6\times 3^5}\quad B=\frac{1{,}8^6\times 50^4}{36\times 15^2}$$

$$C=\frac{0{,}0005\times 14^3}{70^2}\qquad D=\frac{10^{-3}\times 0{,}4^5}{20^{-5}\times 0{,}2^6}$$

EXERCICE 1.10 - Même exercice :

$$A=\frac{\left(3^4\times 6^8\right)^{-4}}{12^{-11}\times 3^{-30}}\qquad B=\frac{0{,}12^3}{10^6}\times\frac{5^7}{0{,}6^4}$$

$$C=\frac{5^{-3}}{0{,}03^{-4}}\times 10^{-6}\times\frac{15^4}{0{,}1}$$

$$D=\frac{0{,}3^5}{24^6}\times\frac{3^{-2}}{8^{-5}}$$

$$E=\frac{30}{0{,}003}\times 0{,}4^5\times\frac{2{,}1^4}{1{,}2^6}\times\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\frac{1}{1000}$$

$$F=\frac{0{,}001^7}{10^{-4}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^6\times\frac{16^2}{6^5}\times 10^3$$

EXERCICE 1.11 - CORRIGE -
Simplifier puis donner le résultat en écriture scientifique :

$$A=4\times 10^5+2\times 10^6-50\times 10^4$$

$$B=0{,}0002+0{,}002-2\times 10^{-4}+200\times 10^{-6}$$

$$C=10^{-5}+10^{-4}-10^{-6}+\frac{1}{10^7}$$

$$D=0{,}16-18\times 10^{-1}+6\times 10^{-2}-400\times 0{,}01^2$$

$$E=\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}-7\times 10^{-4}+12\times 0{,}001$$

$$F=18000000000-0{,}12\times 10^{11}+3\times 10^{10}$$

EXERCICE 1.12 - Simplifier les calculs suivants sans utiliser la calculatrice, puis donner le résultat en écriture scientifique :

$$A=0{,}5\times 10^6+5{,}1\times 10^7-1{,}12\times 10^5$$

$$B=14\times 10^{-3}-300\times 10^{-5}+6\times 10^{-4}$$

$$C=18000\times 10^6-36\times 10^{10}+0{,}043\times 10^{13}$$

$$D=\frac{56\times 10^{-2}-3000\times 10^{-4}}{0{,}13}$$

$$E=0{,}14\times 10^{-3}+\frac{70}{10^6}-2100\times 0{,}001^3$$

$$F=\frac{30}{10^6}+0{,}00004-\frac{10^{-4}}{50^{-2}}-10^{-6}+3500\times 10^{-8}$$

Chapitre II : ENTIERS : ARITHMETIQUE

EXERCICE 2.1 - CORRIGE PARTIEL -
Calculer le PGCD des couples (a ; b) suivants :

a = 30 b = 42
a = 630 b = 280
a = 2688 b = 1760

EXERCICE 2.2 – Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{30}{42};\frac{-630}{-280};\frac{2688}{1760};\frac{275}{-425};\frac{-243}{-702};\frac{525}{75};\frac{15}{20};\frac{858}{715}.$$

EXERCICE 2.3 - CORRIGE -

Un collectionneur possède 14 400 timbres français et 21 600 timbres étrangers. Il désire vendre sa collection en plusieurs lots identiques.
Combien de lots peut-il faire au maximum ?

EXERCICE 2.4 – Un papetier a en stock 180 gommes et 405 crayons. Pour les écouler pendant les soldes, il les vend en paquets contenant des gommes et des crayons. Combien peut-il faire de paquets identiques au maximum et que contiennent-ils ?

EXERCICE 2.5 – Un cadre mesure 770 mm sur 462 mm. Pour le décorer Véronique veut coller des marguerites en tissu (toutes identiques) tout autour. Elle veut en mettre une à chaque coin et les espacer régulièrement. Quelles sont les différentes possibilités pour l'écart entre deux fleurs ? Quel serait le minimum de fleurs qu'elle puisse mettre ?
Indication : les marguerites sont représentées par des cercles dont on cherchera à déterminer le rayon.

EXERCICE 2.6 – Calculer le PGCD de 6 et 10. Puis de 12 et 20, puis de 18 et 30 et enfin de 6a et 10a. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2.7 – Dresser la liste des 10 premiers multiples de 8, puis des 5 premiers de 14. Quel est le Plus Petit Multiple Commun (PPCM) de 8 et 14 ? Calculer :

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{14}=;\frac{3}{8}-\frac{5}{14}=.$$

EXERCICE 2.8 – Calculer le PGCD noté *d* de 6 et 21. Calculer 6 × 21, puis le diviser par d. Dresser la liste des 10 premiers multiples de 6, et des trois premiers de 21. Quel est le Plus Petit Multiple Commun à 6 et 21 ?

Chapitre III : DEVELOPPEMENTS – FACTORISATIONS – IDENTITES REMARQUABLES

EXERCICE 3.1

Développer et réduire :

$A = (5x-3)(2x+3)$ $\quad B = (2x-5)^2$

$C = (2x+1)^2$ $\quad D = (7x+1)(3x-1)$

$E = (2x-5)(3x+1)$ $\quad F = (x-2)(3x-1)$

EXERCICE 3.2 **- CORRIGE -**

Même exercice :

$A = (2x-3)(5x-1)$

$B = (x-3)^2$

$C = (3x+2)^2 - (x-3)^2$

$D = -2x(x^2 - x + 1)$

$E = 4x(-2x+1)(x+3)$

$F = -2x(3x+5)^2$

EXERCICE 3.3 - Même exercice :

$A = (2x+6)(-x-4) - (x+2)(x-2) + 3x + 1$

$B = (2x-3)^2 - 4(x-1)(x+1) + 2x(3x-1)$

$C = (2x-6)(3x+4) - (4x-5)^2 + (3x-2)^2$

$D = (-x-5)(x+6)^2 - 3(2x-4)^2 + 4(x^2-5)$

$E = \left(x + \frac{1}{2}\right)(-2x+3) - \frac{2}{3}(3x-7)(3x+7)$

$F = (4x-1)(4x+1) - 3x(8x-2) + 2(6-x)^2$

EXERCICE 3.4 **- CORRIGE -**

Même exercice :

$A = (x+2)^2 - 6x(3x-5)^2 + (4x-3)(2x-2)^2$

$B = (3b+2a)^2 - 3(a-3)(a+3) + (2a-b)^2$

$C = (2x+3)(x-7) - (x+6)(x-6) + 5x(8x-9)$

$D = (a-2)(b-5) - 2b(3a-1) + (3a-4)(3a+4)$

EXERCICE 3.5 - Factoriser :

$A = 3(4x-3) - (2-x)(4x-3)$

$B = (x+2)(x-5) - 3x(x+2) + 2(x-6)(x+2)$

$C = (2x-1)(x+7) - 5(x+7)^2 + 3(2x+14)$

$D = (8x-5) + 2(5-8x) - (3x+2)(16x-10)$

$E = (4x+12)(x-4) - (2x+6)^2 + (-x-3)(x+8)$

$F = -2x + 5 - 3(5-2x) + 4(3x-8)(10-4x)$

EXERCICE 3.6 **- CORRIGE -**

Factoriser en utilisant les identités remarquables :

$A = (3x-1)^2 - (x+3)^2$

$B = x^2 - 6x + 9$

$C = (3x-2)^2 - (x+4)^2$

$D = 4x^2 - 9$

$E = (x+1) - (x^2 + 2x + 1)$

$F = 16x^2 - (x-2)^2$

EXERCICE 3.7 - Même exercice :

$A = (9x^2 - 1) - 2x(3x+1) + (x-4)(6x+2)$

$B = 4x^2 - 4x + 1 - 5(2x-1)^2 + (6x-3)(x+5)$

$C = 16(x-7)^2 - 25(x+3)^2$

$D = (x^2 + 10x + 25) - (x+6)(3x+15) - 2(x+5)$

$E = (-x-4)(3x-5) - 2(9x^2 - 25) + 4(3x-5)^2$

$F = (16x^2 - 24x + 9) - 4(x^2 + 2x + 1)$

EXERCICE 3.8

Soient $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{B}(x)$ les expressions suivantes :

$\mathrm{A}(x) = (2x-3)^2 + (4x-6)(x+2) + 4x(2x-3)$

$\mathrm{B}(x) = (x^2 - 25) - (x+6)(x+5) + x^2 + 10x + 25$

1) Développer et réduire $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{B}(x)$.

2) Factoriser $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{B}(x)$.

Calculer $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{A}(\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1+\sqrt{2})$.

Chapitre IV : RACINES CARREES

EXERCICE 4.1 - CORRIGE -

Calculer :

$A=\sqrt{49}$ $\quad B=\sqrt{8^2}$ $\quad C=\sqrt{3^2}$

$D=2\sqrt{9}$ $\quad E=-\sqrt{4^2}$ $\quad F=-5\sqrt{16}$

$G=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$ $\quad H=\dfrac{\sqrt{4}}{3}$ $\quad I=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$

EXERCICE 4.2 - CORRIGE -

Même exercice :

$A=4\sqrt{27}\times 2\sqrt{12}$ $\quad B=\sqrt{15}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{27}}$

$C=7\times\sqrt{\dfrac{5}{2}}\times\sqrt{\dfrac{10}{49}}$ $\quad D=3\sqrt{8}\times\sqrt{\dfrac{18}{4}}$

$E=5\sqrt{3}\times 2\sqrt{12}$

$F=\sqrt{14}\times\sqrt{21}\times\sqrt{6}$

$G=\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\times\sqrt{40}$

$H=\sqrt{\dfrac{\sqrt{81}}{16}}$

EXERCICE 4.3 - Simplifier et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$:

$A=3\sqrt{18}-\sqrt{2}+5\sqrt{8}$

$B=6\sqrt{3}+2\sqrt{75}$

$C=\sqrt{160}+3\sqrt{40}$

$D=\sqrt{600}-4\sqrt{24}$

$E=\sqrt{128}+\sqrt{18}-2\sqrt{2}$

$F=3\sqrt{50}+\sqrt{200}$

$G=\sqrt{1331}-2\sqrt{99}+5\sqrt{44}$

EXERCICE 4.4 - Simplifier et réduire :

$A=3\sqrt{12}-2\sqrt{18}+\sqrt{300}-\sqrt{2}$

$B=2\sqrt{45}-5\sqrt{500}+4\sqrt{245}$

$C=12\sqrt{7}-\sqrt{196}+4\sqrt{63}$

$D=\sqrt{28}-5\sqrt{15}+2\sqrt{252}+3\sqrt{60}$

$E=\sqrt{27}-3\sqrt{108}+6\sqrt{363}$

$F=\sqrt{17}-\sqrt{484}+2\sqrt{68}-3$

EXERCICE 4.5 - Même exercice :

$A=\sqrt{6}\times\sqrt{2}\times\dfrac{5}{4\sqrt{3}}$

$B=\sqrt{\dfrac{10}{9}}\times 6-\sqrt{250}+3\sqrt{90}$

$C=\dfrac{5}{\sqrt{28}}\times\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}-8$ $\quad D=\sqrt{3^5\times 15\times 5^3}$

$E=\sqrt{2^3\times 49}\sqrt{\dfrac{2^7\times 9}{400}}$

$F=\dfrac{\sqrt{300\times 12\times\dfrac{1}{16}}}{36\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{28}}{6}$

EXERCICE 4.6 - Développer et réduire :

$A=\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)$

$B=\left(5+\sqrt{7}\right)\left(5-\sqrt{7}\right)$

$C=\left(\sqrt{6}-3\right)\left(3+\sqrt{6}\right)$

$D=\left(\sqrt{2}+7\right)^2+3\left(\sqrt{2}-7\right)^2$

$E=\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$

EXERCICE 4.7 - Même exercice :

$A=\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(4+2\sqrt{5}\right)-3\left(6+4\sqrt{5}\right)$

$B=2\sqrt{3}\left(5-6\sqrt{2}\right)+\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$

$C=\left(-4\sqrt{7}+5\sqrt{2}\right)\left(-3\sqrt{2}-6\sqrt{7}\right)$

$D=-5\left(2\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)$

$E=\left(\dfrac{3\sqrt{11}}{5}-\sqrt{44}\right)^2+\left(\sqrt{11}+\sqrt{9}\right)^2$

EXERCICE 4.8 - CORRIGE -

Simplifier en faisant disparaître les racines au dénominateur :

$A=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ $\quad B=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ $\quad C=\dfrac{-3}{\sqrt{18}}$

$D=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $\quad E=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ $\quad F=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$

EXERCICE 4.9 - Même exercice :

$A=\dfrac{4}{\sqrt{2}-5}$ $\quad B=\dfrac{-1}{3+\sqrt{6}}$ $\quad C=\dfrac{\sqrt{5}}{5-3\sqrt{5}}$

$D=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$ $\quad E=\dfrac{5-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$ $\quad F=\dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}-4\sqrt{5}}$

EXERCICE 4.10

Soit la fonction f définie par :

$f(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2$

1) Développer puis factoriser $f(x)$.

2) Calculer $f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ et $f(\sqrt{2})$.

Chapitre V : EQUATIONS- INEQUATIONS

EXERCICE 5.1 – Résoudre :

1) $5x+3=19x+\frac{1}{2}$
2) $8x-4=4x+1$
3) $3(2x+1)=8x-7$
4) $23-7x=42x-107$

EXERCICE 5.2 - Résoudre :

1) $3x-5=4x+2$
2) $6x+1=3x-4$
3) $8(x-2)-3x=4(x+3)-5$
4) $2(x-4)-3(x+1)=5(x-2)$
5) $3\left(x+\frac{1}{2}\right)-5(2x-3)=\frac{3}{2}(x-5)$
6) $4x+2(x-7)=\frac{1}{3}(6x-9)$

EXERCICE 5.3 - CORRIGE -

Même exercice :

1) $-2(x-6)+\frac{1}{4}=\frac{3x}{2}+9(-2x+1)$
2) $16(x-1)-6x=8x+4(x-2)$
3) $\frac{-3x}{7}+\frac{1}{3}=\frac{8x}{3}-\frac{3}{7}(x-2)$
4) $\frac{3x+2}{4}-2x=\frac{3}{2}(3x-5)$
5) $\frac{-4x+1}{6}+\frac{3x-1}{2}=\frac{x-4}{3}$
6) $\frac{8x-5}{20}-\frac{1}{4}=\frac{3-x}{5}-\frac{x+6}{2}$

EXERCICE 5.4 - Même exercice :

1) $4x-5(x+3)=3(x-6)+2x$
2) $\frac{8x-1}{5}-4(x-2)=\frac{3x}{2}+\frac{1}{5}$
3) $\frac{3x-5}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2x+1}{2}-4$
4) $\frac{x+7}{2}-\frac{x-4}{10}=\frac{1}{5}-\frac{x-5}{2}$
5) $x^2-4(x+1)-2x=(x+3)(x-5)$

EXERCICE 5.5 - Résoudre les équations-produits :

1) $(x-5)(x+3)=0$
2) $(3x-1)(x-7)=0$
3) $(x+8)(x-2)(2x+4)=0$
4) $(x-6)^2=0$
5) $(x-4)(x+4)=0$
6) $(x+10)(2x-1)(x+7)\left(3x-\frac{1}{2}\right)=0$

EXERCICE 5.6 - Factoriser puis résoudre :

1) $4(x-2)-(x+1)(x-2)=0$
2) $x^2-14x+49=0$
3) $x^2-9=0$
4) $(x+10)(x-3)=(x-3)(x+1)$
5) $25x^2=1$
6) $x^2-6x=-9$

EXERCICE 5.7 - CORRIGE -

Factoriser puis résoudre :

1) $(4x-5)(x+2)-3(4x-5)=2x(4x-5)$
2) $x^2-6x+9=(x-3)(2x+5)$
3) $(3x-1)^2-(4x-7)^2=0$
4) $(16x^2-25)=(x+4)(4x+5)$
5) $4x^2-4x+1=x^2+6x+9$
6) $x^2-16=3(x-4)^2$

EXERCICE 5.8 - Résoudre les inéquations :

1) $2x+1\geq x-5$
2) $4x-8\leq 6x-4$
3) $3x-7(x+3)\geq 2(x-4)$
4) $-3x-2\leq x-3$
5) $\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\geq 4x+1$
6) $-2(x+1)-3\leq x-2$

EXERCICE 5.9 - Même exercice :

1) $-5(2x-4)-3(x+2) < x-6(x+1)$
2) $3(4x-7)-2(x+10) > 3(x-3)$
3) $\frac{2x-5}{2}-\frac{1}{5} < \frac{-3x+7}{10}$

4) $\frac{4x-10}{4}+\frac{x}{2} > \frac{-3x}{8}+5x$

5) $\frac{2x}{9}-\frac{1}{3} < \frac{-x}{18}+\frac{4}{9}$

6) $\frac{-3x+1}{12}-\frac{2x+4}{4} < \frac{10x-1}{18}-\frac{1}{2}$

EXERCICE 5.10 - CORRIGE -

Résoudre :

1) $x^2-7x+10 \leq (x-2)^2$

2) $9x^2-10-4x^2 > 5x^2-x+5$

3) $3(x-2)(x+2) \leq (x-7)(3x-1)$

4) $-2(x+4)+4(x^2-5) \geq (2x+1)^2$

EXERCICE 5.11

Un terrain rectangulaire a une longueur de 80 m et une largeur de 55 m. on augmente la longueur de 8 m. De combien doit on diminuer la largeur pour que l'aire du terrain ne change pas ? Pour que le périmètre du terrain ne change pas ?

EXERCICE 5.12

Trouver quatre entiers consécutifs dont la somme est 1030. Peut-on trouver quatre entiers consécutifs dont la somme soit 1789 ?

EXERCICE 5.13 - CORRIGE-

Un père âgé de 53 ans a trois enfants, respectivement âgés de 12, 16 et 17 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il la somme des âges de ses trois enfants ?

EXERCICE 5.14 - CORRIGE -

Lors d'une sortie au cinéma organisée par l'école, le professeur paye 120 € pour ses 24 élèves. Sachant que 6 d'entre eux bénéficient d'une réduction de 1 € en raison de leur âge, calculer le prix d'une place à plein tarif.

EXERCICE 5.15

J'ai 2 ans de plus que ma sœur. Nos deux âges additionnés donnent l'âge de notre mère qui vient de fêter ses 46 ans. Quel est mon âge ?

EXERCICE 5.16

Dans 10 ans, dit Catherine, j'aurai la moitié de l'âge de mon père. Aujourd'hui, il a 38 ans. Quel est mon âge ?

EXERCICE 5.17

Dans un champ rectangulaire de cent sur quatre cents mètres, on creuse une mare circulaire dont l'aire représente le quart de celle du champ. Quel doit être le rayon de la mare ?

EXERCICE 5.18

M. Dupont part en voiture d'une ville A à 8h pour une ville B située à 210 km où il arrive à 10h48 (il roule à vitesse régulière). Une autre automobiliste, M^{me} Patachon part de B à 9h et se dirige vers A à la vitesse de 60 km/h.

1) A quelle vitesse roule M. Dupont ?
2) A quelle heure arrive M^{me} Patachon dans la ville A ?
3) A quelle heure et à quelle distance de la ville A ces 2 automobilistes se croisent-ils?

Chapitre VI : SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS

EXERCICE 6.1 - Résoudre :

1) $\begin{cases} x+4y-24=0 \\ x+2y-21=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

EXERCICE 6.2 - CORRIGE -

Résoudre le système suivant par substitution, puis par addition :

$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+5y=-3 \end{cases}$

EXERCICE 6.3 - Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x-y+9=0 \\ x+y-3=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x+8y=2 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x+9y=-4 \\ 8x-5y=-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10x+8y=46 \\ 5x-4y=17 \end{cases}$

EXERCICE 6.4 - CORRIGE -

Résoudre : $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{7}{9} \\ x-y=12 \end{cases}$

EXERCICE 6.5

Un restaurant dispose de 180 carafes, les unes de contenance 50 cl les autres de contenance 75 cl. Il lui faut 120 litres de Beaujolais pour remplir ces 180 carafes. Trouver le nombre de carafes de chaque sorte.

EXERCICE 6.6

Christine dispose de 12 € de plus que Claudine. Lorsqu'elles ont chacune dépensé 36 €, il reste à Christine deux fois plus d'argent qu'à Claudine. Combien possédaient-elles l'une et l'autre avant leurs achats

EXERCICE 6.7

Eric ne possède que des billets de 5 € et de 10 €.

1) Sachant qu'il utilise 19 billets pour payer exactement 150 €, combien de billets de chaque sorte donnera-t-il ?
2) Pour 150 €, Eric a acheté six CD et trois DVD. Sachant que le prix d'un CD représente les $\frac{6}{13}$ du prix d'un DVD, quels sont les prix d'un CD et d'un DVD ?

EXERCICE 6.8

Soit un repère orthonormé (O,I,J).

1) Tracer la droite D d'équation $y = \frac{2}{3}x + 4$.
2) Tracer la droite D' d'équation $y = -3x + 15$.
3) Calculer les coordonnées du point d'intersection B des droites précédentes.
4) Vérifier graphiquement le résultat précédent.
5) Quelles sont les coordonnées du point C, point d'intersection de D avec l'axe des ordonnées ?
6) Quelles sont les coordonnées du point D, point d'intersection de D' avec l'axe des abscisses ?

N étant un point du segment [CD] on note y la distance CN.

7) Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle ABM.
8) Exprimer, en fonction de y, l'aire du trapèze ABCN.
9) Déterminer x et y de telle sorte que les distances BM et CN soient égales et que l'aire du trapèze ABCN soit le triple de l'aire du triangle ABM.

EXERCICE 6.9

Deux ouvriers travaillent dans le même atelier. L'un gagne les trois-quarts de ce que gagne l'autre. Le premier ayant travaillé 16 jours et le second 20 jours, ils ont gagné 672 € à eux deux. Quels étaient les salaires quotidiens des deux ouvriers ?

EXERCICE 6.10 - CORRIGE -

Xavier dit à son père : « Dans huit ans, j'aurai la moitié de ton âge ». Son père lui répond : « il y a quatre ans, j'avais trois fois ton âge. ». Quels sont actuellement les âges de Xavier et de son père ?

EXERCICE 6.11

Soit un repère orthonormé (O,I,J) et les droites D et D', d'équations:

D : $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

D' : $y = \frac{-1}{5}x - \frac{3}{5}$

1) Tracer les droites D et D'.
2) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection A. Vérifier ce résultat graphiquement.

EXERCICE 6.12

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et représenter la solution graphiquement.

1) $\begin{cases} -8 + 5x \geq 3x + 2 \\ 5x + 3 \geq -2x - 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3 \leq 5 \\ 5x - 4 \leq -x - 4 \end{cases}$

Chapitre VII : REPERES – DISTANCES – DROITES

EXERCICE 7.1

Soit un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, placer les points A, B, et C, et

calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AC}$:

1) A(-3 ;2) B(4 ;-1) C(2 ;5)
2) A(1 ;-2) B(-1 ; $\frac{1}{2}$) C(3 ;-3)
3) A($\frac{1}{4}$;2) B($-\frac{1}{2}$;1) C(3 ; $\frac{5}{4}$)
4) A(-3 ;4) B($\frac{3}{2}$;-1) C($\frac{1}{2}$;-2)

EXERCICE 7.2

Reprendre chacun des cas de l'exercice 12.1, et calculer les coordonnées de I, J et K, les milieux respectifs de [AB], [BC], et [AC].

EXERCICE 7.3

Dans un repère (O, I, J), on donne les points A(-3 ;1), B(2 ;3), C(0 ;5) et D(-5 ;3).

1) Faire une figure.
2) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
3) Calculer les coordonnées de O', centre du parallélogramme ABCD.

EXERCICE 7.4 - CORRIGE -

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(-1 ;3), B(4 ;-2), C(4 ;-5) et D(-1 ;0).

1) Calculer les coordonnées des points K et L, milieux respectifs de [AC] et [BD].
2) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 7.5

Dans un repère orthonormé (O, I, J), placer les points A(3 ;4) et M(1 ;1).

1) Calculer les coordonnées du point B, tel que M soit le milieu de [AB].
2) Placer le point B.

EXERCICE 7.6

Soit un repère orthonormé (O, I, J) et les points A(-3 ;-2), B(0 ;4) et C(4 ;1). On sait que ABCD est un parallélogramme.

1) Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme ABCD.
2) Calculer les coordonnées du centre K de ce parallélogramme.

EXERCICE 7.7 - CORRIGE -

Dans un repère (O, I, J), on donne les points

A(-1 ;2), B($-\frac{3}{2}$;$-\frac{1}{2}$) et C(2 ;$-\frac{5}{2}$).

Calculer les coordonnées des milieux K, L, et M des segments [AB], [BC], et [AC].

EXERCICE 7.8

Dans un repère orthonormé (O, I, J), calculer les longueurs des côtés du triangle ABC dans les cas suivants :

1)	A(-1 ;2)	B(3 ;-4)	C(9 ;5)
2)	A(0 ;3)	B(5 ;4)	C(2 ;-1)
3)	A(5 ;-3)	B(-2 ;-1)	C(3 ;4)
4)	A(2 ;$\frac{3}{2}$)	B($\frac{5}{2}$;-4)	C($\frac{9}{2}$;$-\frac{1}{2}$)

EXERCICE 7.9 - CORRIGE -

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A(-3 ;2), B(4 ;2) et C(4 ;6).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 7.10

Soit un repère orthonormé (O, I, J).

1) Placer les points A(4 ;1) et B(8 ;3).
2) Donner la valeur exacte de la distance AB.
3) Calculer les coordonnées de M, milieu du segment [AB].
4) Soit C, le point de coordonnées (4 ;3). Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
5) Calculer les coordonnées de D, 4^e sommet du parallélogramme ADCB.

EXERCICE 7.11

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on place les points A(-2 ;3), B(1 ;2), et C(-1 ;6).

1) Calculer AB, AC, et BC.
2) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
3) Calculer les coordonnées de D, 4^e sommet du carré ABDC.

EXERCICE 7.12

Soit un repère (O, I, J) et les points E(5 ;-7) et F(-3 ;3).

1) Calculer l'équation de la droite (EF).
2) Par le point G(-6 ;-4), on trace D, la parallèle à la droite (EF) passant par G. Calculer l'équation de la droite D.

EXERCICE 7.13 - CORRIGE -

Parmi les droites suivantes, indiquer celles qui sont :

1) horizontales
2) verticales
3) parallèles entre elles
4) perpendiculaires entre elles

$D_1 : y = 3x + 2$	$D_2 : y = 4x - 1$
$D_3 : y = -\frac{1}{3}x - 5$	$D_4 : y = 4$
$D_5 : y = 3x - 1$	$D_6 : y = -x + \frac{1}{4}$
$D_7 : x = 2$	$D_8 : y = x + 6$
$D_9 : y = -\frac{1}{3}x$	$D_{10} : y = -\frac{1}{3}$

EXERCICE 7.14

Dans un repère (O, I, J), on donne les points A(3 ;2), et B(-4 ;1).

1) Calculer l'équation de la droite (AB).
2) Soit M, milieu de [AB]. Calculer les coordonnées de M.
3) Calculer l'équation de la droite (OM).

EXERCICE 7.15

On donne les équations de deux droites du plan :

$$D : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$D' : y = \frac{2}{3}x - 2$$

1) Le point A (-1, -1) appartient-il à D ? à D' ?

3) Donner le coefficient directeur de D.

3) Les droites D et D' sont-elles parallèles (2 méthodes) ?

4) Trouver l'équation de la droite D'' parallèle à D' et passant par A.

4) Tracer D, D', D''.

EXERCICE 7.16

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soient les points A(2, 3), B(0, -1), C(8, 0).

1) Placer les points A, B, C.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Soient :
- C' le symétrique de C par rapport à A.
- I le milieu du segment [BC'].
- A' le symétrique de A par rapport à I.
   a) Montrer que le quadrilatère ABA'C' est un rectangle.
   b) Montrer que les droites (AA') et (BC) sont parallèles.
   c) Quelle est la nature du quadrilatère AA'BC?
   d) Démontrer que AC = AC', et que BC = BC'.

4) Calculer AB, AC', BC'.

EXERCICE 7.17

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A (6 ;-1), B (2 ;-2) et C (5 ;3).

1) Placer les points A, B, C.
2) Montrer que les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.
3) Calculer AB, AC et BC.
4) Quelle est la nature du triangle ABC ?
5) Soit D le symétrique de A par rapport au milieu N de [BC]. Calculer les coordonnées de N puis celles de D. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 7.18

On considère trois points A (- 3 ; 0), B (0 ; 5) et C (3 ; 4).

1) Les trois points sont-ils alignés ?
2) Déterminer l'équation de la droite (AB).
3) Déterminer l'équation de la médiane (AA'), si A' est le milieu du segment [BC].

EXERCICE 7.19

La droite D passe par A (1 ;3) et a pour coefficient directeur 2.

La droite D' passe par B(2 ;2) et a pour coefficient directeur -3.

Construire ces droites, puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

<u>Chapitre VIII :</u> FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

EXERCICE 8.1 - Soient les fonctions

$f(x) = -\frac{1}{2}x$ et $g(x) = -2x + 6$.

1) *f* et *g* sont-elles linéaires ? affines ? En déduire la nature de leurs représentations graphiques respectives.
2) Calculer les images de $-2, -1$, 0, 3 et $\frac{3}{4}$ par *f* puis par *g*.
3) Calculer les antécédents de -3, 0, $\frac{4}{3}$ et 6 par *f* puis par *g*.
4) A l'aide des résultats obtenus par la fonction *f* dans les questions précédentes, compléter le tableau suivant :

x		-2	-1	0	3		7	8	10
$f(x)$	6					-3			

EXERCICE 8.2 - CORRIGE -

Soit *f* la fonction affine de coefficient directeur 4 et d'ordonnée à l'origine -1.

1) Donner la formule générale de $f(x)$.
2) Calculer les images de $-3, -1, 0, \frac{1}{2}, 4$.
3) Calculer les antécédents de -1, 3, 6, 8.

EXERCICE 8.3 - Soit *f* une fonction linéaire.

Déterminer $f(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(2) = -3$.
2) $f(-1) = 4$.
3) $f(3) = 1$

EXERCICE 8.4 – CORRIGE PARTIEL -

Soit *f*, une fonction affine. Déterminer $f(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(-5) = 2$ et $f(1) = -3$
2) $f(0) = 4$ et $f(3) = -1$
3) $f(2) = -4$ et $f(5) = 8$

EXERCICE 8.5 - Parmi les fonctions suivantes, reconnaître les fonctions linéaires et les fonctions affines (certaines ne sont ni l'une ni l'autre) :

$f(x) = 5x - 1$ $\quad$ $f(x) = \frac{3}{x}$

$f(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad$ $f(x) = -\sqrt{2}x - 1$

$f(x) = \sqrt{3}x$ $\quad$ $f(x) = \frac{x+4}{3}$

$f(x)=4x^2-1$ $\qquad$ $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$

EXERCICE 8.6 - Déterminer les images des nombres suivants par les différentes fonctions affines identifiées dans l'exercice 8.5.

$x=0$ $\qquad$ $x=-1$

$x=\sqrt{2}$ $\qquad$ $x=2\sqrt{3}$

EXERCICE 8.7 - Soient *f* et *g*, les fonctions telles que $f(x)=-3x$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+4$.

1) Représenter graphiquement *f* et *g*.
2) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D et D', représentations graphiques de *f* et *g*.
3) Vérifier ce résultat graphiquement.

EXERCICE 8.8

Trois artisans, Jean, Karl et Louis, fabriquent chaque mois le même nombre de meubles.
Leurs salaires mensuels sont les suivants :

- Jean a un salaire fixe de 1600 €.
- Karl a un salaire fixe de 500 € augmenté de 10 € par meuble fabriqué.
- Louis a un salaire de 1000 € augmenté de 5 € par meuble fabriqué.

1° Recopier et compléter le tableau ci-dessous représentant le salaire de chacun des artisans lorsqu'il a fabriqué 100 puis 150 meubles par mois :

	JEAN	KARL	LOUIS
150 meubles			
100 meubles			

2° On se place dans un repère orthogonal et on prendra pour unités :

- sur l'axe des abscisses 1 cm pour 10 unités.
- sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 100 unités.

Construire dans ce repère les droites représentant les fonctions y_J, y_K et y_L.

$D_1 : y_J = 1600$

$D_2 : y_K = 10x+500$

$D_3 : y_L = 5x+1000$

3° Répondre aux questions suivantes par le calcul, puis vérifier les résultats obtenus sur le graphique :

a) A partir de combien de meubles fabriqués en un mois, Karl aura-t-il un salaire supérieur ou égal à celui de Louis ?
b) A partir de combien de meubles fabriqués en un mois, Karl aura-t-il un salaire supérieur ou égal à celui de Jean ?
c) Les trois artisans peuvent-ils toucher le même salaire mensuel ? Expliquer dans quel cas.

EXERCICE 8.9 - CORRIGE -

Un commerçant accorde à son client une remise de 20% sur ses articles.

1) Une veste valait 80 €. Quel est son prix après la remise ?
2) Soit *x* le prix d'un article avant la remise, et *y* le prix du même article après la remise. Exprimer *y* en fonction de *x*.
3) Un article vaut 48 € après remise. Calculer son prix avant la remise.

EXERCICE 8.10

Un marchand de glaces propose à ses clients des cornets de crème glacée. Il les achète 0,50 € l'unité au fabricant GELKONE. Il en achète 150 et les revend 4,50 € pièce.
Soit *x* le nombre de cornets vendus.
Soit $R(x)$ la recette gagnée par le marchand.
Soit $B(x)$ le bénéfice réalisé par le marchand (le bénéfice est égal à la recette moins le coût d'achat du fabricant).

1) Exprimer $R(x)$ et $B(x)$ en fonction de *x*.
2) Soit la fonction $B(x)=4{,}50x-75$.

Représenter cette fonction graphiquement dans un repère (O, I, J). On prendra 1 cm pour 10 glaces en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée.

3) A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
   a) Combien de glaces doit vendre le marchand pour que son bénéfice soit nul ?
   b) Combien de glaces doit-il vendre pour réaliser un bénéfice de 75 € ?
   c) Quel bénéfice réalise-t-il s'il vend 60 glaces ? 80 glaces ?
4) Retrouver les résultats des questions a), b) et c) par le calcul.

EXERCICE 9.1

Lors du baccalauréat 1989 les notes obtenues en mathématiques dans un centre d'examen de la région parisienne ont été, pour 40 candidats :
1; 12; 11; 14; 15; 8; 6; 11; 12; 9; 4; 10; 12; 14; 18; 5; 16; 10; 6; 14; 17; 12; 8; 7; 4; 11; 12; 15; 13; 13; 10; 14; 16; 7; 10; 19; 10; 5; 18; 11.

1) Ordonner ces résultats et donner, dans un tableau, l'effectif de chaque note.
2) Calculer les fréquences des notes.
3) Calculer la moyenne des notes.
4) Choisir une répartition en classes correcte.
5) Construire l'histogramme correspondant au choix précédent.

EXERCICE 9.2

Le prix de vente (Toutes Taxes Comprises) d'un même article a été relevé dans différents magasins :

Magasin	N°1	N°2	N°3	N°4
Prix	55,4	61	59	49,9

N°5	N°6	N°7	N°8	N°9
50	53,8	52	54,7	57,7

On considère le caractère suivant : la valeur du caractère sera le nombre impair i tel que
$\{i-1 < \text{prix exact} \leq i+1\}$.

1) Dessiner un histogramme à bandes, l'axe des abscisses étant coupé en tranches de 2 € entre 48 € et 62 €, avec en ordonnée la fréquence du caractère.

2) Calculer le prix moyen de l'article et la moyenne du caractère, commenter.

EXERCICE 9.3 - CORRIGE -

On étudie les parts de marché de chaque constructeur automobile. Sur un diagramme circulaire, leurs secteurs respectifs sont de :

Renault :	141°
Fiat :	83°
Citroën :	86°
Ford :	50°

1) Exprimer ces parts de marché sous forme de pourcentage.

2) Sachant que le marché total est de 1 296 milliers de véhicules, exprimer la part de chaque constructeur en milliers de véhicules.

EXERCICE 9.4

Les clientes d'un salon de coiffure se répartissent de la façon suivante :

Employées :	34%
Cadres :	19%
Etudiantes :	11%
Retraitées :	11%
Professions libérales :	5%
Sans profession :	20%

1) Représenter ces données sur un diagramme circulaire.
2) Sachant que les clientes cadres sont au nombre de 57, combien le salon compte-t-il de clientes :
   - dans chaque catégorie ?
   - au total ?

EXERCICE 9.5

Déterminer la médiane, si elle existe, de la série statistique suivante :
12 ; 5 ; 21 ; 3 ; 11 ; 13 ; 8.

EXERCICE 9.6 - CORRIGE -

Même question que ci-dessus avec la série :
12 ; 7 ; 12 ; 12 ; 4 ; 12 ; 2 ; 12.

EXERCICE 9.7

Dans une classe de 30 élèves, les notes au dernier contrôle sont réparties de la manière suivante :

Note	Nombre d'élèves	Note	Nombre d'élèves
2	3	11	7
5	1	12	2
6	2	15	5
8	6	16	2
9	1	18	1

1) Calculer la moyenne de cette série.
2) Calculer la médiane, puis le mode.
3) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants.
4) Calculer les fréquences associées à chaque note, puis calculer les fréquences cumulées décroissantes.
5) Tracer un diagramme en bâtons.

EXERCICE 9.8 - CORRIGE -
Dans une entreprise de 50 salariés, les salaires sont répartis entre les classes suivantes :

Classe de salaires (€)	Effectif
[1000 ; 1200[	12
[1200 ; 1400[	15
[1400 ; 1600[	13
[1600 ; 1800[	8
[1800 ; 2000[	2

1) Tracer un histogramme.
2) Calculer la moyenne de cette série.
3) Calculer la fréquence associée à chaque classe.

EXERCICE 9.9
Sur un groupe de 15 élèves, on étudie le nombre de frères et sœurs qu'a chaque élève :

Nbre de frères et sœurs	Effectif
0	1
1	3
2	7
3	2
4	1
5	1

1) Après avoir traduit les données en angles, tracer un diagramme circulaire.
2) Déterminer le nombre de frères et sœurs moyen, puis médian de la série.
3) On ajoute à l'étude trois élèves qui ont respectivement 2, 4 et 5 frères et sœurs. Calculer alors la moyenne et la médiane de cette nouvelle série.

EXERCICE 9.10 - CORRIGE -
Laura a obtenu 8, 12, 14 et 11 aux quatre derniers contrôles de mathématiques.
1) Quelle doit être sa note au dernier contrôle du trimestre si elle veut obtenir 13 de moyenne générale ?
2) Si elle obtient 18 à ce dernier contrôle, quelle sera alors sa moyenne ?

Chapitre X : RAPPELS DE GEOMETRIE ET THEOREME DE THALES

EXERCICE 10.1 - Soit un triangle isocèle ABC tel que AB = AC.
Soit H le pied de la perpendiculaire menée de A à (BC).
1) Montrer que H est le milieu de $[BC]$.
2) Soit K le milieu du segment $[AB]$ et L le milieu de $[AC]$. Montrer que (KL) est parallèle à (BC).
3) En déduire que (KL) est perpendiculaire à (AH).

EXERCICE 10.2 - Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. M est un point de ce cercle, et $\mathcal{C}'$ un cercle de centre M et de rayon 2 cm, coupe le cercle $\mathcal{C}$ en A et B.
1) Comparer les longueurs OA, OB, MA et MB.
2) En déduire que (OM) est la médiatrice du segment $[AB]$.
3) La droite (OM) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en un point D. Comparer AD et DB.
4) Quelle est la nature du triangle ADB ?

EXERCICE 10.3 - Un triangle ABC a une aire de $26{,}23\,\text{cm}^2$ et le côté $[AB]$ mesure 6,1 cm.
1) Tracer ce triangle. Y a-t-il plusieurs possibilités ? Expliquer.
2) Calculer CA et CB dans le cas où le triangle est isocèle en C.

EXERCICE 10.4 - CORRIGE -
Soit un triangle ABC d'aire $12\,\text{cm}^2$ et dont deux des hauteurs mesurent 4 cm et 5 cm.
1) Faire un schéma à main levée.
2) Calculer la longueur de deux des côtés de ce triangle.
3) Tracer ce triangle à l'aide des longueurs obtenues.

EXERCICE 10.5 - Soit ABCD, un trapèze rectangle de bases AB et CD tel que (AD) est perpendiculaire à (AB).

On a : $AB = 5\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$, $AD = 3\,\text{cm}$.
Par le point B, on trace la perpendiculaire à (DC), qui coupe (DC) en H.

1) Calculer HC, puis BC.
2) Calculer l'aire du trapèze ABCD.
3) Soit M le point du segment $[AB]$ tel que $AM = 2\,\text{cm}$. Calculer MD et MH.
4) Le triangle DHM est-il rectangle ? Justifier.

EXERCICE 10.6 - Soit ABC un triangle rectangle en A. O est le milieu du côté $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à O.
1) Montrer que ABA'C est un parallélogramme.
2) En déduire que ABA'C est aussi un rectangle.
3) Montrer que $OA = OB = OC$. Qui est le centre du cercle circonscrit à ABC ?

EXERCICE 10.7 - Soit MACL un parallélogramme de centre O. Soit I le centre de gravité du triangle MAL et J celui du triangle LAC.
1) Démontrer que les points I, O, J sont alignés.
2) Démontrer que $MI = IJ = JC$.

EXERCICE 10.8 - Soient A, B, M trois points non alignés. On désigne par I le point du segment $[AM]$ tel que $AI = \dfrac{2}{3}AM$. C est le symétrique de B par rapport à M et J est le milieu de $[AC]$.
Démontrer que B, I, J sont alignés.

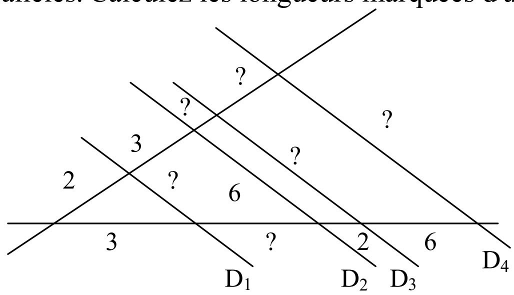
EXERCICE 10.9 - CORRIGE -
Soit un triangle ABC tel que $AC = 6{,}4\ \text{cm}$, $AB = 4{,}8\ \text{cm}$, $BC = 8\ \text{cm}$.
1) Faire une figure.
2) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
3) Calculer l'aire du triangle ABC.
4) Soit D un point de la droite (AB) distinct de B, tel que $BA = AD$. Calculer l'aire du triangle BCD.
5) En déduire l'aire du triangle DAC.

EXERCICE 10.10 - Soit un trapèze rectangle ABCD, tel que $AB = 3\,\text{cm}$, $AD = 4\ \text{cm}$, $CD = 5$ et $\hat{A} = \hat{D} = 90°$.
Les droites (AC) et (BD) se coupent en O.
1) Démontrer que le triangle BCD est isocèle en D.
2) Calculer l'aire du triangle BAD.
3) Calculer l'aire du trapèze ABCD.
4) Montrer que $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$, et calculer ces rapports.
5) Les droites (AD) et (BC) se coupent en S. Calculer la mesure de SA.
6) En déduire la mesure de [SB] (2 méthodes possibles).

EXERCICE 10.11 - Soit un parallélogramme ABCD.
M le milieu du segment [AB] et N le milieu du segment [CD].
Les droites (DM) et (BN) coupent la droite (AC) respectivement en P et Q.
1) Quelle est la nature du quadrilatère MBND ?
2) Comparer les distances AP, PQ et QC.

EXERCICE 10.12 - On considère le triangle ABC tel que AB = 4, AC = 6 et BC = 8. Soit M un point du segment [AB] tel que AM = 3 et N un point de [AC] tel que AN = 4,5.
1) Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).
2) Calculer le rapport $\dfrac{MN}{BC}$ et en déduire la mesure du segment [MN].

EXERCICE 10.13 - D_1, D_2, D_3 et D_4 sont parallèles. Calculez les longueurs marquées d'un ?.



EXERCICE 10.14 - CORRIGE -
On considère le triangle ABC tel que AB = 8, AC = 7 et BC = 9. Soit M un point du segment [AB] tel que AM = 2.
Par M on trace la parallèle à la droite (BC). Elle coupe le segment [AC] en N. Calculer le périmètre du triangle AMN.

EXERCICE 10.15 - On considère un quadrilatère ABCD quelconque. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en O.
La parallèle à la droite (AB) passant par O coupe la droite (BC) en M.
La parallèle à la droite (AD) passant par O coupe la droite (CD) en N.
1) Comparer les rapports $\dfrac{CM}{CB}$, $\dfrac{CO}{CA}$, $\dfrac{CN}{CD}$.
2) Montrer que les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

EXERCICE 10.16 - ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et AC = 3 cm.
D est le point de la demi-droite [BA) tel que BD = 6 cm. La parallèle à (AC) qui passe par D coupe (BC) en E.
1) Calculer BC.
2) Calculer BE.

EXERCICE 10.17 - CORRIGE -
ABC est un triangle tel que AB = 7 cm, AC = 5 cm et BC = 6 cm.

E est le point de [AB] tel que AE = 4,9 cm. F est le point de [AC] tel que AF = 3,5 cm.
Montrer que (EF) et (BC) sont parallèles.

Chapitre XI : TRIGONOMETRIE ET TRIANGLE RECTANGLE

EXERCICE 11.1
Soit un triangle ABC rectangle en A.
Calculer :

1) AB si $AC = 8$ et $A\hat{C}B = 40°$.

2) $C\hat{B}A$ si $AB = 3$ et $BC = 8$.

3) $B\hat{C}A$ si $C\hat{B}A = 50°$ et $AB = 4$.

4) BC si $AB = 4$ et $B\hat{C}A = 26°$.

5) AC si $BC = 10$ et $C\hat{B}A = 65°$.

EXERCICE 11.2 - CORRIGE -
Soit un triangle ABC isocèle en C, tel que $AB = 10$, $CH = 3$, avec H, milieu de [AB].
1) Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).
2) Calculer la valeur exacte de AC.
3) Calculer l'angle $\hat{A}$ et en déduire les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
4) Calculer le périmètre de ABC.
5) Calculer l'aire de ABC.

EXERCICE 11.3
Soit un triangle ABC rectangle en B. On donne $AB = 2{,}4$ et $AC = 6{,}4$.

1) Calculer la valeur de l'angle $B\hat{A}C$.
2) Soit K le pied de la hauteur issue de B. Calculer BK.
3) En déduire l'aire des triangles BKC, AKB et BAC.

EXERCICE 11.4

Soit un triangle ABC rectangle en A et tel que AB = 3 et AC = 4. Calculer le cosinus et le sinus de chaque angle du triangle.

EXERCICE 11.5 - CORRIGE -
Soit un triangle ABC rectangle en A. Le cosinus de l'angle en B vaut 0,3 et on donne BC = 12.
1) Déterminer AB.

2) Quel est le sinus de l'angle $\hat{B}$?

3) Déterminer le sinus et le cosinus de l'angle $\hat{C}$.

EXERCICE 11.6 - CORRIGE -
Un observateur situé à 30 m d'un clocher le voit sous un angle de 40°. Quelle est la hauteur du clocher sachant que les yeux de l'observateur sont situés à 1,65 m du sol ?

EXERCICE 11.7
A partir de l'extrémité de son ombre, un arbre est vu sous un angle de 50°. Sachant que la longueur de l'ombre est de 5 mètres, calculer la hauteur de l'arbre.

EXERCICE 11.8
Soit un triangle ABC rectangle en A, tel que

$AC = 6$, et $B\hat{C}A = 30°$.
1) Calculer la valeur exacte de BC.
2) Soit O le milieu de [AC] et $\mathcal{C}$, le cercle de centre O et de rayon [OA]. $\mathcal{C}$ coupe [BC] en D. Démontrer que le triangle ACD est rectangle en D.
3) Calculer la valeur exacte de AD, puis celle de CD.
4) Par B, on trace la perpendiculaire à (BC), qui coupe (AC) en E. Montrer que (EB) et (AD) sont parallèles.
5) Calculer la valeur exacte de EB.

Chapitre XII : ROTATIONS – ANGLES – POLYGONES REGULIERS

EXERCICE 12.1

Soit un triangle ABC rectangle isocèle en A, tel que BC = 8 et AB = $4\sqrt{2}$.

1) Donner une rotation de centre A qui transforme B en C (on précisera l'angle et le sens de cette rotation).
2) Construire par cette rotation l'image D de C, et l'image E de D.
3) Quelle est la nature de l'image du triangle ABC par cette rotation ?
4) Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ? Justifier.

EXERCICE 12.2 - CORRIGÉ -

Soit ABC un triangle isocèle en A, tel que $\widehat{ACB} = 50°$ et $BC = 6$.

1) Quelle est l'image de B par la rotation de centre A, d'angle 80° et de sens positif ?
2) Construire C', l'image de C par cette rotation.
3) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AC'C}$? Justifier.

EXERCICE 12.3

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 4 cm. On place le point A sur C.

1) Construire le point B, image de A par la rotation de centre O et d'angle 60°.
1) Construire de même les points C, D, E et F, images respectives de B, C, D et E par la même rotation.
2) Quelle est l'image du point F par cette rotation ? Justifier.
3) Quelle est la nature du polygone ABCDEF obtenu ? Justifier.

EXERCICE 12.4

Construire un triangle ABC tel que $AB = 3$, $\widehat{BAC} = 60°$, et $\widehat{ABC} = 90°$. Le cercle de centre A et de rayon [AB] coupe le segment [AC] en H.. On considère la rotation de centre A et d'angle 60° transformant B en H.

1) Construire en couleur l'image du triangle ABC par cette rotation (on nommera J l'image du point C par cette rotation).
2) Démontrer que l'angle $\widehat{AJH}$ mesure 30°.
3) Quelle est la mesure du segment [AJ] ?

EXERCICE 12.5

Soit ABCD un carré de centre O et de côté AB = 4 cm. Soit E, un point situé à l'intérieur du triangle ABO.

1) Construire le point G, symétrique de E par rapport à O.
2) On considère la rotation de centre O et d'angle 90°, transformant B en A. Cette rotation transforme le point E en F et le point G en H. Construire les points F et H.
1) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Justifier.

EXERCICE 12.6 - CORRIGE – $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. On note O son centre. D est la médiatrice du segment [BC]. La droite D coupe l'arc $\overset{\frown}{BC}$ qui ne contient pas A en I.

1) Quelle est la nature du triangle BOC ?
2) Comparer les angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{IOC}$.
3) Montrer que la droite (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 12.7

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et [AB] et [DC], deux diamètres de $\mathcal{C}$, perpendiculaires entre eux.

1) Construire un point M appartenant à l'arc $\overset{\frown}{AC}$.
2) Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.
3) Calculer les mesures des angles $\widehat{AMD}$, $\widehat{DMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{AMC}$.

EXERCICE 12.8

Soit un triangle ABC équilatéral, et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit, de centre O. Construire M, un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A.

1) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.
3) Calculer de même $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$.

EXERCICE 12.9

Soit un cercle C de diamètre [BC], de centre O, tel que BC = 4 cm. Soit H, le point de [BC] tel que $BH = \frac{3}{4}BC$. La perpendiculaire en H à (BC) coupe le demi-cercle supérieur en A.

1) Que représente la droite (AH) pour [OC] ?
2) Quelles sont les natures des triangles AOC et ABC ?
3) Construire le point D, image de A par la rotation de centre O, d'angle 90° et de sens positif.
4) Calculer la mesure de l'angle $D\hat{O}B$.
5) En déduire la mesure de l'angle $D\hat{C}B$.
6) Calculer la mesure de l'angle $D\hat{B}C$. En déduire la mesure de l'angle $D\hat{O}C$.

EXERCICE 12.10

C est un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Construire un hexagone régulier de centre O inscrit dans le cercle C.

EXERCICE 12.11

ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O. On donne OA = 4 cm.

1) Faire une figure.
2) Calculer la mesure de l'angle $A\hat{B}O$.
3) En déduire la mesure de l'angle $A\hat{B}C$.

EXERCICE 12.12

Construire un octogone régulier ABCDEFGH de centre O et de côté AB = 1,2 cm. Calculer la mesure de l'angle $A\hat{O}B$.

EXERCICE 12.13

Soit un hexagone régulier ABCDEF. On donne OA = 5 cm.

1) Faire une figure.
2) Calculer la mesure de l'angle $E\hat{F}O$.
3) En déduire la mesure du segment [EF].

EXERCICE 12.14

Construire un triangle équilatéral ABC de côté 6 cm.

1) Tracer C, le cercle circonscrit au triangle ABC. On appellera son centre O.

2) Calculer la mesure de l'angle $B\hat{O}C$ (2 méthodes).

EXERCICE 12.15

Soit un pentagone régulier ABCDE. Construire ce polygone, sachant que OA = 3 cm,

1) A l'aide d'une rotation dont on précisera l'angle et le centre.
2) En calculant d'abord l'angle $A\hat{B}O$.

Chapitre XIII : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

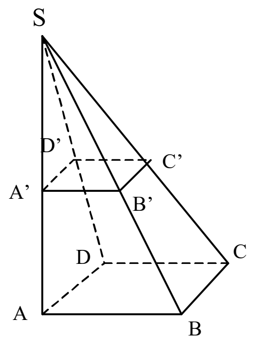
EXERCICE 13.1

SABCD est une pyramide régulière à base carrée, de sommet S et de hauteur [SH]. $AB = 4\,\text{cm}$ et SH = 5 cm.

1) Calculer AC.
2) En déduire SA.
3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

EXERCICE 13.2

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide de hauteur [SA] et de base le rectangle ABCD. On donne $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 3\,\text{cm}$, $SA = 7\,\text{cm}$.



1) Calculer AC.

2) Déterminer la tangente de l'angle $S\hat{B}A$. A l'aide de la calculatrice, donner la mesure de l'angle $S\hat{B}A$ à 1 degré près par défaut.
3) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

4) On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base, de manière que $SA' = \frac{1}{2}SA$. Déterminer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

EXERCICE 13.3 - CORRIGE -

Soit OBCDE une pyramide régulière de sommet O et de base carrée BCDE.
Un plan P parallèle à la base coupe [OB] en M. On donne $OM = \frac{1}{4}OB$.
Le plan P coupe les segments [OC], [OD] et [OE] respectivement en N, Q et R.

1) Faire une figure en perspective (le carré sera représenté en perspective par un parallélogramme).
2) La pyramide OBCDE a un volume de 400 cm^3. En déduire le volume de la pyramide OMNQR.
3) La face OBC a pour aire 64 cm^2. En déduire l'aire du triangle OMN.
4) Calculer l'aire latérale de la pyramide OMNQR.

EXERCICE 13.4

Soit une pyramide SABCD de base carrée ABCD.
$AB = 4$ cm et $SC = 6$ cm.

1) Sachant que le volume de SABCD a pour valeur exacte $\frac{32\sqrt{7}}{3}$ cm^3, calculer la valeur exacte de SH, hauteur de la pyramide SABCD.
2) En déduire l'aire du triangle SCH.

EXERCICE 13.5 - CORRIGE -

Soit un cône de révolution de sommet I et de base le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 3 cm et de hauteur $IO = 5$ cm.

1) Calculer le volume du cône
2) Soit un point A tel que [OA] est un rayon du cercle $\mathcal{C}$. Calculer IA.

EXERCICE 13.6

Un cône de révolution de sommet S a pour base un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $OA = 5$ cm. De plus, $SO = 8$ cm.
Soit B, un point du segment [SO] tel que $SB = 6$ cm.
On coupe ce cône par un plan perpendiculaire à la droite (OS) et passant par B. La section du cône par ce plan est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre B.

1) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}'$.
2) Calculer SA et en déduire SA'.
3) Calculer le volume du grand cône et en déduire celui du petit cône de hauteur [SB].

EXERCICE 13.7 - CORRIGE -

La pyramide du Louvre à Paris est une pyramide régulière de base carrée ABCD. Chaque côté du carré a une longueur de 34 m. La hauteur de la pyramide est de 21 m.

1) Quel est le volume de la pyramide ?
2) Soit I le milieu du côté [AB], S le sommet, O le centre du carré de base.
   Evaluer OI, SI.
3) Evaluer la longueur d'une arête à 1m près.
4) Quelle est la surface latérale (surface des vitres à nettoyer !) ?

EXERCICE 13.8

Soit ABCD une pyramide régulière à base carrée et de sommet S.
On donne : AB = 4 cm et AS = 6 cm et on désigne par O le point d'intersection des diagonales du carré.

a) Calculer la distance AO.
b) Calculer la distance OS.
c) En déduire le volume de la pyramide.

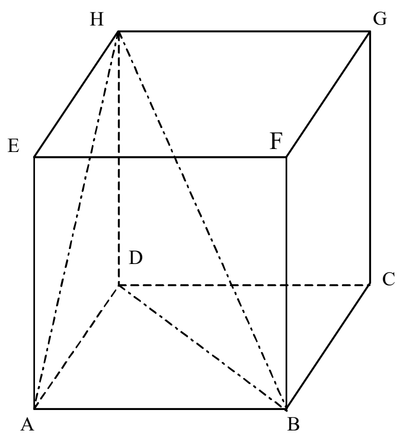
EXERCICE 13.9

On considère un cône de révolution de sommet S et on désigne par O le centre de son cercle de base. A est un point de ce cercle.
On donne : OS = 8,9 cm et OA = 2,4 cm.

a) Représenter, en coupe dans le plan vertical (OSA), le triangle OSA.
b) En déduire la distance AS.
c) Calculer la valeur de l'angle $\widehat{OSA}$ (On utilisera la calculatrice).

EXERCICE 13.10

Les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont indiquées sur le dessin en perspective ci-dessous :
$AB = 7,5$ cm, $BC = 6$ cm, $AE = 8$ cm.



1) Montrer que la longueur de [HA] est de 10 cm.

2) Calculer $\cos \widehat{HAD}$. En déduire la mesure, à un degré près, de l'angle $\widehat{HAD}$.

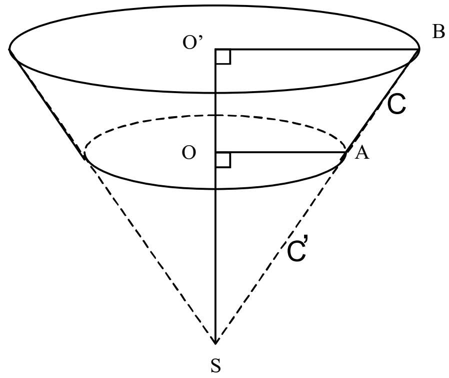
3) Calculer la longueur de [HB], puis la mesure à un degré près de l'angle $\widehat{HAB}$.

4) Calculer le volume de la pyramide de sommet H et de base le triangle DAB.

EXERCICE 13.11

Un château d'eau a la forme d'un tronc de cône représenté ci-dessous en trait plein. (Un tronc de cône est la partie d'un cône comprise entre sa base et un plan parallèle à cette base).

On donne OO' = OA = OS = 5 m.



1) Calculer O'B.
2) Calculer le volume du cône C' de sommet S et de base le disque de rayon [OA]. Le résultat sera arrondi au mètre cube.
3) Soit C le cône de sommet S et de base le disque de rayon [O'B]. En constatant que le cône C est un agrandissement du cône C', calculer le volume du cône C .
4) En déduire le volume du château d'eau.

Partie C : ENTRAINEMENT AU BREVET

EXERCICE 1

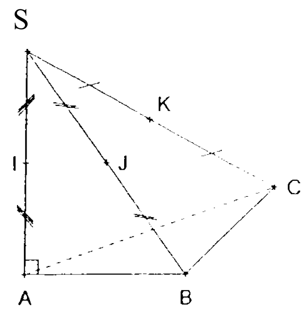
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

Pour chacune des trois questions indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

1) Quelle est la forme développée de l'expression $(2x + 1)^2 - 1$?	$2x^2 - 2x$	$4x^2 + 4x$	4
2) Quelle est la forme factorisée de l'expression $(2x - 1)^2 - 1$?	$(2x + 1)(2x - 1)$	$2x(2x - 2)$	$2x(2x + 2)$
3) On donne les deux équations $(x-6)(x+1)=0$ et $x^2 - 3x = 18$. Combien ont-elles de solutions communes ?	aucune solution commune	une solution commune	deux solutions communes

EXERCICE 2

SABC est une pyramide ayant pour base le triangle ABC et pour hauteur SA.
AB = 6 cm ; BC = SA = 8 cm ; AC = 10 cm



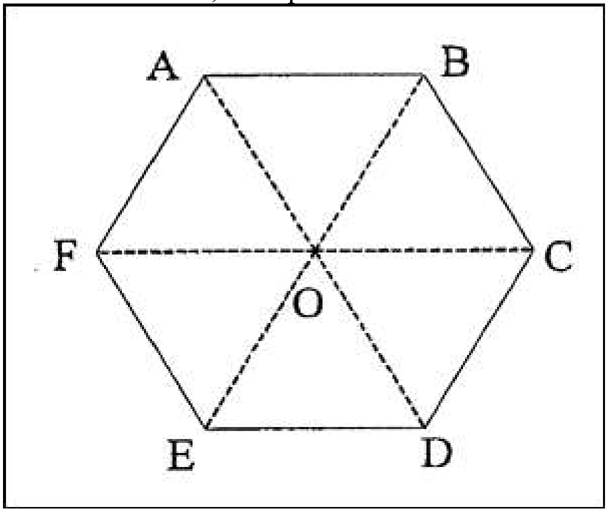
1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Calculer la longueur BS.
3. Calculer le volume de la pyramide SABC.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times \text{h}$ *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire de la base et* h *la hauteur.*

4. On appelle I, J, K les milieux respectifs des arêtes [SA], [SB], [SC].
Calculer le volume de la pyramide SIJK.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, les réponses seront données sans justification.



ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.

1) Quel est le symétrique du triangle OCD par rapport au point O ?
2) Quel est le symétrique du triangle EFO par rapport à la droite (EO) ?
3) Quelle est l'image du triangle OCD par la rotation de centre O, d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre ?

EXERCICE 4 : **Problème**

Pour emprunter des livres dans une bibliothèque, on a le choix entre trois formules.

- Formule A : payer une participation de 0,50 € par livre emprunté.
- Formule B : acheter une carte rose de bibliothèque à 7,50 € par an et ne payer qu'une participation de 0,20 € par livre emprunté.
- Formule C : acheter une carte verte de bibliothèque à 15,50 € par an et emprunter autant de livres que l'on veut.

PARTIE I

1) Recopier et compléter le tableau suivant

Nombre de livres empruntés par an	10	30	45
Prix à payer avec la formule A en €			
Prix à payer avec la formule B en €			
Prix à payer avec la formule C en €			

2) On appelle x le nombre de livres empruntés par une personne en un an. Soit P_A le prix à payer avec la formule A. Soit P_B le prix à payer avec la formule B. Soit P_C le prix à payer avec la formule C.

Exprimer P_A et P_B en fonction de x.

3) Résoudre l'équation $0{,}5x = 7{,}5 + 0{,}2x$.

Donner une interprétation de la solution trouvée.

PARTIE II

Les tracés demandés dans cette partie seront réalisés sur une feuille de papier millimétré fournie.

1) a) Tracer un repère orthogonal (O, I, J), O étant placé en bas à gauche. On prendra les unités suivantes : 1 cm pour 5 livres sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 1 € sur l'axe des ordonnées.

b) Tracer dans ce repère.

- la droite D_A qui représente la fonction $f(x) = 0{,}5x$
- la droite D_B qui représente la fonction $g(x) = 0{,}2x + 7{,}5$
- la droite D_C qui représente la fonction $h(x) = 15{,}5$

2) En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la formule la plus intéressante si on emprunte 20 livres en un an ?

b) À partir de combien de livres empruntés par an la formule C est-elle la plus intéressante ?

Partie D : CORRIGES

Chapitre I : CALCUL ALGEBRIQUE (RAPPELS)

EXERCICE 1.2

Etape 1 : mettre au même dénominateur.

$$\left.\begin{array}{l}8=2\times2\times2\\12=2\times2\times3\\3=3\times1\end{array}\right\}\ 2\times2\times2\times3=24$$

Donc :

$$A=\frac{1\times3}{8\times3}-\frac{5\times2}{12\times2}+\frac{1\times8}{3\times8}-\frac{24}{24}$$

$$A=\frac{3}{24}-\frac{10}{24}+\frac{8}{24}-\frac{24}{24} \qquad A=\frac{-23}{24}$$

On obtient de même : (pas pour E et F)

$B=\frac{313}{60}$ $\quad C=\frac{33}{68}$ $\quad D=\frac{148}{27}$

$E=-4$ $\quad F=\frac{103}{10}$

EXERCICE 1.4

$A=1$ $\quad B=\frac{1}{6}$ $\quad C=\frac{3}{85}$

$D=\frac{11}{5}$ $\quad E=\frac{2}{3}$ $\quad F=\frac{3}{4}$

EXERCICE 1.7 $\quad A=9^2\times12^3\times6^2$

Etape 1 : décomposer en nombres premiers.

$$A=\left(3^2\right)^2\times\left(3\times2^2\right)^3\times(3\times2)^2$$

$$A=3^4\times3^3\times2^6\times3^2\times2^2$$

Etape 2 : regrouper les nombres et réduire.

$$\underline{A=3^9\times2^8}$$

De même, on obtient :

$B=3^4\times2^9\times5^2$ $\quad C=\frac{1}{2^{13}\times3\times5^8}$

$D=\frac{2^2\times5^4}{3^5}$ $\quad E=2^3\times3^3\times5$ $\quad F=\frac{5}{2^{14}}$

EXERCICE 1.8

$A=5\times10^3$ $\quad B=1{,}2\times10^{-3}$

$C=6{,}4213\times10^2$ $\quad D=4{,}5\times10^5$

$E=2{,}5\times10^{-1}$ $\quad F=9\times10^{-6}$

$G=1{,}01\times10^{-2}$ $\quad H=3{,}145$

$I=1{,}4\times10^{-8}$ $\quad J=2$

$K=3{,}5\times10^{-6}$ $\quad L=2{,}24\times10^4$

$M=8\times10^{21}$ $\quad N=5\times10^{15}$

EXERCICE 1.11

$A=4\times10^5+2\times10^6-50\times10^4$

Etape 1 : On fait apparaître 10^4 dans les trois membres du calcul.

$$A=4\times10^1\times\underline{10^4}+2\times10^2\times\underline{10^4}-50\times\underline{10^4}$$

Etape 2 : On factorise le calcul par 10^4.

$$A=10^4\left(4\times10^1+2\times10^2-50\right)$$

Etape 3 : On réduit la parenthèse.

$$A=10^4(40+200-50) \qquad A=10^4\times190$$

Etape 4 : On met le résultat en écriture scientifique. $\quad \underline{A=1{,}9\times10^6}$

De même, on obtient :

$B=2{,}2\times10^{-3}$ $\quad C=1{,}091\times10^{-4}$

$D=-1{,}62$ $\quad E=2{,}43\times10^{-2}$ $\quad F=3{,}6\times10^{10}$

Chapitre II : ENTIERS : ARITHMETIQUE

EXERCICE 2.1 –

1ère méthode

30 = $\underline{2}\times\underline{3}\times5$

42 = $\underline{2}\times\underline{3}\times7$

PGCD(30 ; 42) = 2 × 3 = 6

2ème méthode

42 = 30 × 1 + 12

30 = 12 × 2 + **6**

12 = 6 × 2 + 0

PGCD(30 ; 42) = 2 × 3 = 6

EXERCICE 2.3 –

Chaque paquet ayant la même composition, il faut trouver le plus grand nombre qui divise aussi bien 14 400 que 21 600. Il faut donc chercher le PGCD de 14400 et 21600.

21600 = 14400 × 1 + **7200**

14400 = 7200 ×2 + 0

PGCD(14400 ; 21600) = 7200

Il peut faire 7200 packs.

Chapitre III : DEVELOPPEMENTS – FACTORISATIONS – IDENTITES REMARQUABLES

EXERCICE 3.2

$A = 10x^2 - 17x + 3$ $B = x^2 - 6x + 9$

$C = 8x^2 + 18x - 5$ $D = -2x^3 + 2x^2 - 2x$

$E = -8x^3 - 20x^2 + 12x$ $F = -18x^3 - 60x^2 - 50x$

EXERCICE 3.4

$A = -38x^3 + 137x^2 - 106x - 8$

$B = 5a^2 + 10b^2 + 8ab + 27$

$C = 41x^2 - 56x + 15$

$D = 9a^2 - 5ab - 5a - 6$

EXERCICE 3.6

$A = 4(x-2)(2x+1)$ $B = (x-3)^2$

$C = 4(x-3)(2x+1)$ $D = (2x-3)(2x+3)$

$E = -x(x+1)$ $F = (3x+2)(5x-2)$

Chapitre IV : RACINES CARREES

EXERCICE 4.1

$A = 7$ $B = 8$ $C = 3$

$D = 6$ $E = -4$ $F = -20$

$G = \dfrac{2}{3}$ $H = \dfrac{2}{3}$ $I = \dfrac{2}{3}$

EXERCICE 4.2

$A = 144$ $B = \dfrac{5}{3}$ $C = 5$

$D = 18$ $E = 60$ $F = 42$

$G = 1$ $H = \dfrac{3}{4}$

EXERCICE 4.8 $A = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

Etape 1 : On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$ pour faire disparaître la racine au dénominateur.

$$A = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

Etape 2 : On réduit la fraction.

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{5}}{10}}$$

De même, on obtient :

$B = \sqrt{3}$ $C = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ $D = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

$E = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ $F = \dfrac{\sqrt{35}+7}{14}$

ATTENTION : Pour les résultats E et F, il ne faut surtout pas simplifier les fractions par 2 et par 7, car le numérateur de ces fractions contient une addition et non une multiplication !!!

Chapitre V : EQUATIONS – INEQUATIONS

EXERCICE 5.3

1) $$-2(x-6) + \frac{1}{4} = \frac{3x}{2} + 9(-2x+1)$$

Etape 1 : On développe les deux membres de l'équation.

$$-2x + 12 + \frac{1}{4} = \frac{3x}{2} - 18x + 9$$

Etape 2 : On regroupe les termes en x à gauche, et les autres termes à droite de l'équation.

$$-2x - \frac{3x}{2} + 18x = 9 - 12 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{-4x - 3x + 36x}{2} = \frac{36 - 48 - 1}{4}$$

$$\frac{29x}{2} = \frac{-13}{4}$$

Etape 3 : On met les deux membres au même dénominateur.

$$\frac{58x}{4} = \frac{-13}{4}$$

Donc $58x = -13$

$$\boxed{x = \frac{-13}{58}}$$

De même, on obtient :

2) $x = -4$ 3) $x = -\frac{11}{56}$ 4) $x = \frac{32}{23}$

5) $x = -2$ 6) $x = -\frac{19}{11}$

EXERCICE 5.7

1) $(4x-5)(x+2)-3(4x-5) = 2x(4x-5)$

Etape 1 : On place tout à gauche de l'équation.

$\underline{(4x-5)}(x+2)-3\underline{(4x-5)}-2x\underline{(4x-5)} = 0$

Etape 2 : On factorise l'expression de façon à obtenir une équation-produit.

$$(4x-5)(x+2-3-2x) = 0$$

$(4x-5)(-x-1) = 0$

Etape 3 : On résout l'équation-produit.

$4x-5=0$ $-x-1=0$

$x = \frac{5}{4}$ $x = -1$

L'équation a donc deux solutions.

De même, on obtient :

2) $x = -8$ et $x = 3$ 3) $x = \frac{8}{7}$ et $x = 6$

4) $x = -\frac{5}{4}$ et $x = 3$ 5) $x = -\frac{2}{3}$ et $x = 4$

6) $x = 4$ et $x = 8$.

EXERCICE 5.10

1) $x^2 - 7x + 10 \le (x-2)^2$

Etape 1 : On développe les deux membres car le nombre de x^2 est le même dans les deux membres.

$$x^2 - 7x + 10 \le x^2 - 4x + 4$$

donc $-7x + 10 \le -4x + 4$

Etape 2 : on résout l'inéquation en regroupant les termes en x à gauche et les autres termes à droite.

$$-3x \le -6$$

Etape 3 : On divise les deux membres par –3 et **on change le sens de l'inéquation**.

$$x \ge 2$$

De même, on obtient :

2) $x > 15$ 3) $x \le \frac{19}{22}$ 4) $x \le -\frac{29}{6}$

EXERCICE 5.13

Etape 1 : Choix de l'inconnue.

Soit x le nombre d'années écoulées.

Etape 2 : Mise en équation.

Dans x années :

- le père aura (53+x) ans
- les enfants auront (12+x) ans
(16+x) ans
(17+x) ans.

Donc on a :

$$53 + x = 12 + x + 16 + x + 17 + x$$

Etape 3 : On résout l'équation.

$$-2x = -8$$

$$\underline{x = 4}$$

Etape 4 : Conclusion.

Dans 4 ans, l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses trois enfants.

EXERCICE 5.14

Etape 1 :

Soit x le prix d'une place à plein tarif.

Etape 2 :

Prix d'une place tarif réduit : $(x-1)$

Donc on a :

$$\underbrace{6(x-1)}_{\text{6 élèves payent tarif réduit}} + \underbrace{18x}_{\text{18 élèves payent plein tarif}} = \underbrace{120}_{\text{Somme payée}}$$

Etape 3 : On résout l'équation.

$24x = 126$

$x = 5{,}25$

Etape 4 : Le prix d'une place à plein tarif est de 5,25 €.

Chapitre VI : SYSTEMES LINEAIRES D'EQUATIONS

EXERCICE 6.2

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

1) Résolution par substitution :

Etape 1 : On isole x dans la deuxième équation.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x = -3 - 5y \end{cases}$$

Etape 2 : On remplace x par sa valeur en y dans la première équation.

$$\begin{cases} 2(-3-5y) - 3y = 7 \\ x = -3 - 5y \end{cases}$$

Etape 3 : On résout la première équation en y.

$$\begin{cases} -13y = 13 \\ x = -3 - 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 - 5y \end{cases}$$

Etape 4 : On calcule x à l'aide de y.

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \text{donc } S = \{(2;-1)\}$$

Résolution par addition :

$$\begin{cases} 2x-3y=7 & L_1 \\ x+5y=-3 & L_2 \end{cases}$$

Etape 1 : On multiplie L_2 par (-2).

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -2x-10y=6 \end{cases}$$

Etape 2 : On additionne les deux lignes pour faire disparaître les x et on garde une des deux lignes initiales.

$$\begin{cases} -13y=13 \\ 2x-3y=7 \end{cases}$$

Etape 3 : On calcule x dans la deuxième équation à l'aide de la valeur de y.

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{donc } S=\{(2;-1)\}$$

EXERCICE 6.4

Ici, la méthode par substitution est la plus adaptée, en isolant x ou y dans la deuxième équation.

Et on obtient : $S=\{(-42;-54)\}$

EXERCICE 6.10

1) $x=$ âge de Xavier.
$y=$ âge de son père.

2) Âge de Xavier :
dans 8 ans : $x+8$ il y a 4 ans : $x-4$
Âge du père :
dans 8 ans : $y+8$ il y a 4 ans : $y-4$

Donc on a : $\begin{cases} x+8=\frac{1}{2}(y+8) \\ y-4=3(x-4) \end{cases}$

2) On résout le système, et on obtient :

$$\begin{cases} x=16 \\ y=40 \end{cases}.$$

Le père a 40 ans et Xavier a 16 ans.

Chapitre VII : REPERES – DISTANCES – DROITES

EXERCICE 7.4

1) Coordonnées de I :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$$

Donc I ($\frac{3}{2}$;-1).

De même, par le calcul on a J ($\frac{3}{2}$;-1).

2) Les points I et J sont confondus car ils ont les mêmes coordonnées.
Donc les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu.
Donc ABCD est un parallélogramme.

EXERCICE 7.7

K ($-\frac{5}{4}$; $\frac{3}{4}$) L ($\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{2}$)

M ($\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$).

EXERCICE 7.9

1) Calculons AC^2 :

$$AC^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2$$

$$AC^2=7^2+4^2=65.$$

Calculons ensuite BC^2+AB^2 :

$$BC^2+AB^2$$
$$=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

$$BC^2+AB^2=0^2+4^2+7^2+0^2=65.$$

On constate que $AC^2 = BC^2+AB^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2) $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}$.

A l'aide de la formule des distances, on obtient $AB=7$ et $BC=4$.

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{7\times 4}{2}=14\text{ cm}^2.$$

EXERCICE 7.13

1) Droites horizontales : D_4, D_{10}.
2) Droites verticales : D_7.
3) Droites parallèles : $D_1 // D_5$, $D_3 // D_9$
4) Droites perpendiculaires :

D_1 et D_3, D_1 et D_9, D_6 et D_8, D_{10} et D_7, D_4 et D_7

Chapitre VIII : FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

EXERCICE 8.2

1) Soit $f(x)=4x-1$

2) $f(-3)=-13$ $\quad f(-1)=-5$

$f(0)=-1$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$f(4)=15$

3) $f(x)=-1$ donc $4x-1=-1 \Rightarrow x=0$

L'antécédent de –1 est 0.
De même :
L'antécédent de 3 est 1.
L'antécédent de 6 est $\frac{7}{4}$.
L'antécédent de 8 est $\frac{9}{4}$.

EXERCICE 8.4

1) $f(x)=ax+b$

On calcule a et b en utilisant les informations données.

$f(-5)=2$ donc $-5a+b=2$

$f(1)=-3$ donc $a+b=-3$

Puis on résout le système d'inconnues *a* et *b*.

$\begin{cases} -5a+b=2 \\ a+b=-3 \end{cases}$ et on obtient $\begin{cases} a=-\frac{5}{6} \\ b=-\frac{13}{6} \end{cases}$

Donc $f(x)=-\frac{5}{6}x-\frac{13}{6}$.

EXERCICE 8.9

1) $P_0=80$

$P_1=P_0-20\%P_0$

$P_1=80-\frac{20}{100}\times 80$

$P_1=64$

Le prix après remise est de 64 €.

2) $y=x-\frac{20}{100}x$

$y=x\left(1-\frac{20}{100}\right)$

$y=\frac{4}{5}x$. (On obtient une fonction linéaire)

3) On cherche x avec $y=48$.

$\frac{4}{5}x=48$ donc $x=60$.

Le prix avant remise était de 60 €.

Chapitre IX : STATISTIQUES

EXERCICE 9.3

1) L'angle total du cercle est égal à 360°.

Part de Ford en % : $\frac{50}{360}\times 100=14\%$

Part de Citroën en % : 24%
Part de Fiat en % : 23%
Part de Renault en % : 39%.

2) Nombre total de véhicules (en milliers) : 1296

Nombre de véhicules Ford :

$\frac{14}{100}\times 1296=181{,}44$ milliers.

Nombre de véhicules Citroën :
311,04 milliers.
Fiat : 298,08 milliers.
Renault : 505,44 milliers.

EXERCICE 9.6

L'effectif total N = 8.

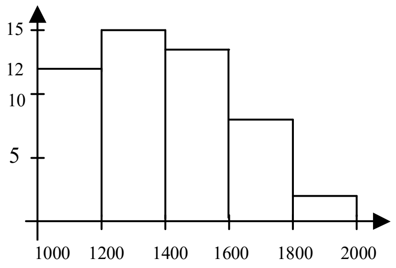
La médiane est la valeur qui partage l'effectif en deux parties de quatre valeurs :

$\underbrace{2;4;7;12}_{4 valeurs} \quad \underbrace{12;12;12;12}_{4 valeurs}$

$m=\frac{12+12}{2}=12$. La médiane est 12.

EXERCICE 9.8

1)



2) Pour calculer la moyenne d'une série regroupée en classes, on calcule le centre de chaque classe :

n_i	12	15	13	8	2
centre	1100	1300	1500	1700	1900

$$\bar{x} = \frac{1100\times 12 + 1300\times 15 + ... + 1900\times 2}{50}$$

$\bar{x} = 1392$.

3) Pour calculer les fréquences, on applique la formule suivante :

$f_i = \frac{n_i}{N}\times 100$ (le résultat obtenu est un pourcentage).

On obtient donc :

x_i	1000	1200	1400	1600	1800
n_i	12	15	13	8	2
f_i	**24%**	**30%**	**26%**	**16%**	**4%.**

EXERCICE 9.10

1) $\bar{x} = 13$.

Donc $\frac{8+12+14+11+x_5}{5} = 13$.

On résout l'équation et on obtient :

$x_5 = 20$.

Laura doit obtenir 20/20 au dernier contrôle.

2) Si $x_5 = 18$ alors $\bar{x} = 12{,}6$.

Chapitre X : RAPPELS DE GEOMETRIE ET THEOREME DE THALES

EXERCICE 10.4

2) On calcule AC et BC, deux côtés du triangle ABC :

Calcul de AC :

On sait que la hauteur relative à [AC] est BH = 5 et que l'aire du triangle est égale à 12 cm^2.

$\frac{Base\times Hauteur}{2} = 12$ donc $\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{BH}}{2} = 12$

$\frac{\mathrm{AC}\times 5}{2} = 12$. On résout l'équation obtenue, et on obtient : $\mathrm{AC} = 4{,}8$.

Calcul de BC :

En appliquant la même méthode et sachant que la hauteur relative à [BC] AK = 4, on obtient $\mathrm{BC} = 6$.

EXERCICE 10.9

2) On applique la réciproque du théorème de Pythagore :

$\mathrm{BC}^2 = 8^2 = 64$.

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 4{,}8^2 + 6{,}4^2 = 64$.

On constate que $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

3) $A = \frac{Base\times hauteur}{2}$

$A = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2} = 15{,}36\ \mathrm{cm}^2$.

4) (CA) est perpendiculaire à (BD), donc (CA) est la hauteur issue de C dans le triangle BCD.

$\Rightarrow A = \frac{\mathrm{BD}\times\mathrm{AC}}{2} = \frac{9{,}6\times 6{,}4}{2} = 30{,}72\ \mathrm{cm}^2$.

5) $A_{\mathrm{DAC}} = A_{\mathrm{BDC}} - A_{\mathrm{ABC}}$

$A_{\mathrm{DAC}} = 30{,}72 - 15{,}36 = 15{,}36\ \mathrm{cm}^2$.

EXERCICE 10.14

Calcul de AN :

Dans le triangle ABC, on a :

(MN) // (BC)

A, M, B alignés

A, N, C alignés.

Donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ donc $\mathrm{AN} = \frac{7}{4} = 1{,}75$ cm.

Calcul de MN :

Dans la configuration de Thalès précédente, on reprend les fractions :

$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ donc $\mathrm{MN} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ cm.

Périmètre du triangle AMN :

$P = \text{AM} + \text{AN} + \text{MN}$

$P = 2 + 1{,}75 + 2{,}25$

$P = 6$ cm.

EXERCICE 10.17

1) A, E, B alignés dans cet ordre.
A, F, C alignés dans le même ordre.

On a $\dfrac{\text{AE}}{\text{AB}} = \dfrac{4{,}9}{7} = 0{,}7$

Et $\dfrac{\text{AF}}{\text{AC}} = \dfrac{3{,}5}{5} = 0{,}7$.

On constate que $\dfrac{\text{AE}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AF}}{\text{AC}}$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (EB) // (BC).

Chapitre XI : TRIGONOMETRIE ET TRIANGLE RECTANGLE

EXERCICE 11.2

1) H est le milieu de [AB], donc (CH) est la médiane issue de C.
Or dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur.
Donc (CH) est perpendiculaire à (AB).

2) Dans AHC rectangle en H, appliquons le théorème de Pythagore :

$\text{AC}^2 = \text{CH}^2 + \text{AH}^2$

$\text{AC}^2 = 3^2 + 5^2$

$\text{AC}^2 = 34$ donc $\text{AC} = \sqrt{34}$.

3) Dans AHC, calculons l'angle $\hat{\text{A}}$:

$\tan \hat{\text{A}} = \dfrac{opp}{adj} = \dfrac{\text{CH}}{\text{AH}}$

$\tan \hat{\text{A}} = \dfrac{3}{5}$. Donc $\hat{\text{A}} = 31°$

ABC est isocèle en C, donc $\hat{\text{A}} = \hat{\text{B}} = 31°$.

Calcul de l'angle $\hat{\text{C}}$:

$\hat{\text{C}} = 180 - (31 + 31) = 118°$.

4) Périmètre de ABC :

$P = \text{AC} + \text{AB} + \text{BC}$

$P = 2\sqrt{34} + 10$ cm (valeur exacte).

5) Aire de ABC :

$A = \dfrac{Base \times Hauteur}{2}$

donc $A = \dfrac{10 \times 3}{2} = 15$ cm^2.

EXERCICE 11.5

1) Dans ABC rectangle en A :

$\cos \hat{\text{B}} = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}$

donc $\text{AB} = \text{BC} \times \cos \hat{\text{B}}$ =12×0,3=3,6 cm.

2) $\sin \hat{\text{B}} = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{\text{AC}}{\text{BC}}$.

Calculons AC :

Dans ABC rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

$\text{BC}^2 = \text{AC}^2 + \text{AB}^2$

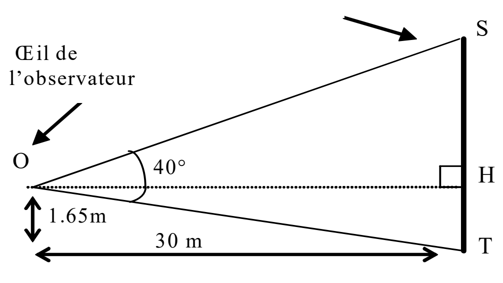
$\text{AC}^2 = \text{BC}^2 - \text{AB}^2$

Donc $\text{AC}^2 = 131{,}04$ et $\text{AC} = 11{,}4$ cm.

Donc $\sin \hat{\text{B}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{BC}} = \dfrac{11{,}4}{12} = 0{,}95$.

3) $\cos \hat{\text{C}} = \sin \hat{\text{B}} = 0{,}95$ $\sin \hat{\text{C}} = \cos \hat{\text{B}} = 0{,}3$

EXERCICE 11.6



Dans OHT, triangle rectangle en H :

$\tan H\hat{O}T = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} \Rightarrow \tan H\hat{O}T = \dfrac{\text{HT}}{\text{OH}}$

$\tan H\hat{O}T = \dfrac{1{,}65}{30} = 0{,}055$ donc $H\hat{O}T = 3{,}1°$

$S\hat{O}H = 40 - 3{,}1 = 36{,}9°$

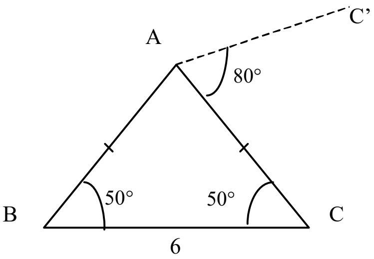
$\tan H\hat{O}S = \dfrac{\mathrm{HS}}{\mathrm{OH}}$

$\mathrm{SH} = \mathrm{OH} \times \tan S\hat{O}H = 30 \times \tan 39{,}6°$
$\mathrm{SH} = 22{,}5 \text{ m}$

La hauteur du clocher est donc de (22,5 + 1,65), c'est-à-dire de 24,15 mètres.

Chapitre XII : ROTATIONS – ANGLES – POLYGONES REGULIERS

EXERCICE 12.2



1) Comme ABC est isocèle en A, alors

$\hat{B} = \hat{C} = 50°$.

Donc l'angle $\hat{A} = 180 - 2 \times 50 = 80°$.
Donc l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 80° est le point C.

3) C a pour image C'.
   A a pour image lui-même (centre de la rotation).
   B a pour image C.

Donc l'angle $A\hat{B}C$ a pour image $A\hat{C}C'$. Comme la rotation conserve les angles, on a

$A\hat{C}C' = 50°$.

On en déduit la mesure de l'angle $A\hat{C}C'$:

$A\hat{C}C' = 180 - (C\hat{A}C' + A\hat{C}C')$

$A\hat{C'}C = 180 - (80 + 50)$

$A\hat{C}C' = 50°$.

EXERCICE 12.6

1) [BO] et [OC] sont deux rayons du cercle C. Donc OB = OC. Par conséquent, OBC est un triangle isocèle en O.

2) $I\hat{A}C$ est un angle inscrit dans le cercle C, et intercepte l'arc $\overset{\frown}{IC}$.

L'angle $I\hat{O}C$ intercepte le même arc, donc c'est l'angle au centre correspondant.

Donc $I\hat{A}C = \dfrac{1}{2} I\hat{O}C$.

3) $I\hat{A}B$ est un angle inscrit dans le cercle C, et $I\hat{O}B$ est l'angle au centre correspondant. Donc $I\hat{A}B = \dfrac{1}{2} I\hat{O}B$.

Le point I appartient à la droite D, médiatrice de [BC]. De plus, comme BO = OC, O est situé à égale distance de B et de C, donc O appartient à D.
Or dans un triangle isocèle, la médiatrice issue du sommet principal est également bissectrice de l'angle.

Donc (OI) est la bissectrice de l'angle $B\hat{O}C$.

$\Rightarrow \quad B\hat{O}I = I\hat{O}C$.

$$\text{Or, on a : } \left.\begin{array}{l} I\hat{A}B = \dfrac{1}{2} I\hat{O}B \\ I\hat{A}C = \dfrac{1}{2} I\hat{O}C \\ I\hat{O}B = I\hat{O}C \end{array}\right\} \text{ donc } I\hat{A}B = I\hat{A}C.$$

La droite (AI) partage l'angle en deux angles égaux, donc (AI) est la bissectrice de $B\hat{A}C$.

EXERCICE 13.3

2) La pyramide OMNQR est une réduction de la pyramide OBCDE.

Le coefficient de réduction est $r = \dfrac{\text{OM}}{\text{OB}} = \dfrac{1}{4}$.

Donc $V_{\text{OMNQR}} = V_{\text{OBCDE}} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

$V_{\text{OMNQR}} = 400 \times \dfrac{1}{64}$

$V_{\text{OMNQR}} = 6{,}25 \text{ cm}^3.$

3) $A_{\text{OMN}} = A_{\text{OBC}} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$A_{\text{OMN}} = 64 \times \dfrac{1}{16} = 4 \text{ cm}^2.$

4) $A = A_{\text{OMN}} \times 4 = 16 \text{ cm}^2.$

EXERCICE 13.5

1) $V = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V = \dfrac{1}{3} \times \Pi \times r^2 \times h$

$V = 15\Pi \approx 47{,}1 \text{ cm}^3.$

2) Dans AIO rectangle en O, on applique le théorème de Pythagore :

$\text{IA}^2 = \text{IO}^2 + \text{OA}^2$

$\text{IA}^2 = 5^2 + 3^2$

$\text{IA}^2 = 34 \quad \Rightarrow \quad \text{IA} = \sqrt{34} \approx 5{,}8 \text{ cm}.$

EXERCICE 13.7

1) $V = \dfrac{1}{3} \times 34^2 \times 21 = 8092 \text{ m}^3.$

2) Calcul de OI :

AOB est un triangle isocèle rectangle en O, donc (OI) est la médiatrice de [AB].

Dans AOI rectangle en I, on applique le théorème de Pythagore :

$\text{OA}^2 = \text{OI}^2 + \text{IA}^2$

$\text{OI}^2 = \text{OA}^2 - \text{IA}^2$

Calculons OA :

Dans AOB rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$\text{AB}^2 = \text{OA}^2 + \text{OB}^2$

Donc $2\text{OA}^2 = 34^2$ et $\text{OA} = \sqrt{578} \approx 24 \text{ m}.$

Alors, on a : $\text{OI}^2 = \text{OA}^2 - \text{IA}^2$

$\text{OI}^2 = 578 - 17^2$

$\text{OI}^2 = 289 \Rightarrow \text{OI} = 17 \text{ m}.$

Calcul de SI :

Dans le triangle SOI rectangle en O, on applique le théorème de Pythagore :

$\text{SI}^2 = \text{OI}^2 + \text{SO}^2$

$\text{SI}^2 = 289 + 21^2$

$\text{SI}^2 = 730 \quad \Rightarrow \quad \text{SI} = \sqrt{730} \approx 27 \text{ m}.$

3) Calcul de l'arête SB :

Dans SIB rectangle en I, on applique le théorème de Pythagore :

$\text{SB}^2 = \text{SI}^2 + \text{IB}^2$

$\text{SB}^2 = 730 + 17^2$

$\text{SB}^2 = 1019 \quad \Rightarrow \quad \text{SB} \approx 31{,}9 \text{ m}.$

4) Aire latérale :

Aire du triangle SAB :

$A_{\text{SAB}} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{\text{SI} \times \text{AB}}{2} = 459 \text{ m}^2.$

Aire latérale :

$A' = A_{\text{SAB}} \times 4$

$A' = 1836 \text{ m}^2.$