Sommaire

Partie A : COURS

Chapitre I : OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS

I. RAPPELS

1° Définition et présentation

Un nombre relatif est composé :

⇨ d'un signe : + (nombre positif) ou $-$ (nombre négatif)

⇨ d'une valeur absolue : sous forme de nombre décimal ou fractionnaire

Ex. : $(-2,3)$ est un nombre relatif négatif puisqu'il est précédé du signe $-$. Sa distance à 0 est de 2,3.

$\left(+\frac{1}{5}\right)$ est un nombre relatif positif puisqu'il est précédé du signe +. Sa distance à 0 est de $\frac{1}{5}$.

2° Comparaison et représentation

Pour comparer deux nombres relatifs, il faut d'abord comparer leur signe, puis leur distance à 0.

Un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif.

Ex. : $-3 < +1$

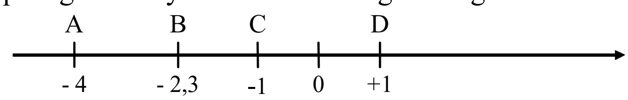
Entre deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande distance à 0.

Ex. : $+1,7 < +5,3$

Entre deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à 0.

Ex. : $-4,8 < -0,5$

On peut représenter ces nombres en les rangeant sur un axe gradué.
On les ordonne du plus petit au plus grand. Il y aura donc les négatifs à gauche et les positifs à droite de 0.



Les nombres relatifs sont les **abscisses** des points.
La distance entre deux points se calcule en faisant la différence de leurs abscisses.

Ex. : $BC = -1 - (-2,3) = -1 + (+2,3) = +1,3$

$AD = +1 - (-4) = +1 + (+4) = +5$

II. OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS

1° L'addition

a - Addition de deux nombres de même signe

La somme a pour : ⇨ signe : celui des deux nombres

⇨ distance à 0 : la somme des distances à 0

Ex. : $(+3) + (+4,5) = +(3 + 4,5) = +7,5$

$(-3,1) + (-2) = -(3,1 + 2) = -5,1$

b - Addition de deux nombres de signes différents

La somme a pour : ⇨ signe : celui du nombre qui a la plus grande distance à 0

⇨ distance à 0 : la soustraction des distances à 0

Ex. : $(+2) + (-5,3) = -(5,3 - 2) = -3,3$

$(-0,2) + (+7,1) = +(7,1 - 0,2) = +6,9$

2° La soustraction

Soustraire un nombre à un autre, revient à additionner son opposé, c'est-à-dire le nombre de même distance à 0 mais de signe différent.

Ex. : $(+3{,}2)-(+5{,}4)=(+3{,}2)+\underline{(-5{,}4)}=-(5{,}4-3{,}2)=-2{,}2$

$(+1{,}7)-(-2{,}8)=(+1{,}7)+\underline{(+2{,}8)}=+(1{,}7+2{,}8)=+4{,}5$

3° Somme algébrique (suite d'additions et de soustractions)

Une somme algébrique est une suite d'additions et de soustractions. Pour la calculer, il existe deux méthodes.

a - Regroupement des termes

Il s'agit de regrouper les termes positifs d'un côté et les termes négatifs de l'autre. Puis on les additionne pour enfin faire le calcul.

Ex. : $A=8-1-2+5$

$A=+8-1-2+5$

$A=(8+5)-(1+2)$

$A=13-3$

$A=10$

b - Calcul progressif

Il s'agit de calculer l'expression au fur et à mesure.

Ex. : $B=4-3-5+1-7$

$B=\ +1\ -5+1-7$

$B=-4\ +1-7$

$B=-3\ -7$

$B=-10$

Il faut toujours penser à lire le chiffre avec son signe.
Puis on se dit :
S'il y a un +, je le gagne, s'il y a un signe $-$, je le perds.
Ex. : $-5+1$
Je perds 5 (bonbons) puis j'en gagne 1. J'en ai donc perdu 4.
$-5+1=-4$

4° La multiplication

a - Règle des signes et calcul d'un produit

Le produit de deux nombres
⇨ de même signe est un nombre positif
⇨ de signes différents est un nombre négatif

Positif = ami
Négatif = ennemi

Les amis de mes amis sont mes amis : + multiplié par + égal +
Les ennemis de mes ennemis sont mes amis : $-$ multiplié par $-$ égal $+$
Les ennemis de mes amis sont mes ennemis : $-$ multiplié par $+$ égal $-$

⇨ La distance à 0 du produit est le produit des distances à 0.

On commence par trouver le signe du produit, puis on fait le calcul de la distance à 0.

Ex. : $(-2)\times(-5{,}1)=+(2\times 5{,}1)=+10{,}2$

$(+1{,}3)\times(-6)=-(1{,}3\times 6)=-7{,}8$

b - Propriétés

Quels que soient les nombres relatifs a, b, et c :

0 x a = 0 a x 0 = 0 1 x a = a a x 1 = a (-1) x a = - a et a x (-1) = - a

(-a) x b = a x (-b) et (-a) x (-b) = a x b

Un produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs ni de l'ordre des calculs :
a x b = b x a et (a x b) x c = a x (b x c)

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction :
a x (b + c) = a x b + a x c et a x (b - c) = a x b - a x c

Un produit de nombres relatifs non nuls est :
- **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair**
- **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**

5° La division

a - Calcul d'un quotient

Ce sont les mêmes règles que pour la multiplication.
Le quotient de deux nombres de même signe est un nombre positif.
Le quotient de deux nombres de signes différents est un nombre négatif.
La distance à 0 du quotient est le quotient des distances à 0.

Ex. : $\frac{-3}{+2} = -\frac{3}{2} = -1,5$ et $\frac{-4}{-5} = +\frac{4}{5} = +0,8$

b - Définitions et propriétés

Si le produit de deux nombres est égal à 1, alors ils sont inverses l'un de l'autre.
L'inverse d'un nombre relatif a non nul est noté $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.

Quels que soient a, b des nombres relatifs (b non nul) :
$\frac{a}{b} \times b = a$ et $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

III. SIMPLIFICATION DES ECRITURES

1° Elimination des parenthèses d'une somme algébrique

Lorsqu'une parenthèse est précédée du signe +, on peut la supprimer sans rien changer de ce qu'elle contient.

Ex. : $A = (8-1)+(-2+5)$
$A = 8-1-2+5$ (Le signe + a « disparu » avec les parenthèses.)

Par contre, lorsqu'elle est précédée du signe $-$, on peut la supprimer à condition de changer tous les signes des éléments qu'elle contient.

Ex. : $B = (4-3)-(5-1+7)$

$B = (4-3)-(+5-1+7)$

$B = 4-3-5+1-7$

2° Règles de priorité

Dans une suite d'opérations avec des nombres relatifs, on effectue en premier les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et les divisions, enfin les additions et les soustractions.

Ex. : $B = (4-3)-(5-1+7)\times 2$

$B = 1 - 11 \times 2$

$B = 1 - 22$

$B = -21$

Chapitre II : OPERATIONS SUR LES FRACTIONS

I. RAPPELS

1° Définition

Une fraction est le quotient de deux nombres.
Elle est composée : ⇨ d'un numérateur en haut
⇨ d'un dénominateur en bas (non nul)

Le dénominateur est le diviseur. C'est pourquoi : $\frac{a}{1} = a$ et $\frac{a}{a} = 1\,(a \neq 0)$

2° Comparaison de deux fractions

Pour comparer deux fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur. La plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Ex. : $\frac{3}{7} = \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{15}{35}$ et $\frac{7}{5} = \frac{7 \times 7}{5 \times 7} = \frac{49}{35}$ Or $15 < 49$ donc $\frac{15}{35} < \frac{49}{35}$ d'où $\frac{3}{7} < \frac{7}{5}$

Cas particulier : si les deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Ex. : comparons $\frac{13}{7}$ et $\frac{13}{11}$ $7 < 11$ donc $\frac{13}{7} > \frac{13}{11}$

3° Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est diviser ou multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre afin d'obtenir une fraction irréductible.

Ex. : $\frac{18}{42} = \frac{18 \div 6}{42 \div 6} = \frac{3}{7}$ $\frac{3{,}5}{2{,}5} = \frac{3{,}5 \times 2}{2{,}5 \times 2} = \frac{7}{5}$

II. OPERATIONS SUR LES FRACTIONS

1° L'addition et la soustraction

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. Si ce n'est pas le cas il faut alors les **réduire au même dénominateur.** (On additionne ou on soustrait des tiers avec des tiers, des quarts avec des quarts, etc.).

Pour **réduire au même dénominateur**, on utilise la propriété suivante : « On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul le numérateur et le dénominateur ». Pour tous a et b (b non nul) relatifs et k un réel non nul : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$

On additionne ou on soustrait alors les numérateurs entre eux sans changer le dénominateur.

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a - c}{d}$$

Il ne faut pas oublier de simplifier le résultat lorsque cela est possible.

Ex. : $\frac{3}{5} + \frac{7}{15} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} + \frac{7}{15} = \frac{9}{15} + \frac{7}{15} = \frac{9+7}{15} = \frac{16}{15}$

$$\frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} - \frac{8 \times 2}{15 \times 2} = \frac{25}{30} - \frac{16}{30} = \frac{25-16}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3 \times 3}{3 \times 10} = \frac{3}{10}$$

2° La multiplication

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd} \qquad \text{(b et d non nuls)}$$

Ex. : $\frac{3}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{3\times5}{2\times8}=\frac{15}{16}$ $\qquad$ $\frac{7}{15}\times\frac{20}{21}=\frac{7\times20}{15\times21}=\frac{7\times5\times4}{3\times5\times3\times7}=\frac{7}{7}\times\frac{5}{5}\times\frac{4}{3\times3}=\frac{4}{9}$

Il faut toujours simplifier avant de calculer.

C'est pourquoi il est utile de connaître ses tables de multiplications et de savoir par quoi est divisible un nombre.

Voici un petit tableau pour s'aider.

Un entier est divisible par	si et seulement si
2	Il se termine par un chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8) Ex. : 146, 12, 25374
3	La somme de ses chiffres est un multiple de 3 Ex. : 471 car 4 + 7 + 1 = 12 et 12 est divisible par 3.
5	Il se termine par 0 ou 5. Ex. : 1 525
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9. Ex. : 2 763 car 2 + 7 + 6 + 3 = 18 et 18 est divisible par 9
10, 100, 1000, ...	Le nombre se termine par un, deux, trois... 0. Ex.: 320 000 est divisible par 10 000, et aussi par 10, 100 et 1000
11	La somme d'un chiffre sur deux est égale à la somme des autres. Ex. : 12 375 car 1 + 3 + 5 = 2 + 7

3° La division

a - Inverse d'une fraction

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ et l'inverse de a $\left(a=\frac{a}{1}\right)$ est $\frac{1}{a}$.

Ex. : L'inverse de $\frac{7}{9}$ est $\frac{9}{7}$. L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

b - La division

Diviser une fraction par une autre, c'est la multiplier par son inverse.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Ex. : $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$

Dans ce genre d'écriture, la position et/ou la taille de la barre de fraction par rapport au signe = est très importante.

Ex. : $\dfrac{\frac{1}{3}}{7}\neq\dfrac{1}{\frac{3}{7}}$

Chapitre III : PUISSANCES D'EXPOSANT, ENTIER RELATIF

I. DEFINITION ET NOTATIONS

1° Rappel sur la multiplication

La multiplication est « née » de l'addition répétée d'un même terme.

$\underbrace{a + a + ... + a}_{\text{n termes}} = n \times a$

Ex. : $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \times 3 = 15$

2° L'exposant

De même que pour la multiplication, la notion de puissance est « née » de la multiplication répétée d'un même terme.

$\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{\text{n facteurs}} = a^n$ Ceci se lit « a puissance n ». n est appelé l'**exposant**.

Ex. : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

3° Particularités

$a^0 = 1$ (si a non nul) $a^1 = a$ a^2 se lit « a au carré » a^3 se lit « a au cube »

II. REGLES DE CALCUL DES PUISSANCES

1° Multiplication d'un même nombre à des puissances différentes

$a^n \times a^p = \underbrace{a \times a ... \times a}_{\text{n termes}} \times \underbrace{a \times a ... \times a}_{\text{p termes}} = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{\text{n+p termes}} = a^{n+p}$

Ex. : $3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

$5^6 = 5^{4+2} = 5^4 \times 5^2$

2° Puissance de puissance

$(a^n)^p = \underbrace{a^n \times a^n \times ... \times a^n}_{\text{p termes}} = \underbrace{\underbrace{a \times a ... \times a}_{\text{n termes}} \times \underbrace{a \times a ... \times a}_{\text{n termes}} \times ... \underbrace{a \times a ... \times a}_{\text{n termes}}}_{\text{p fois n termes}} = \underbrace{a \times a \times ... a}_{\text{p}\times\text{n termes}} = a^{p \times n}$

Ex. : $(3^5)^2 = 3^{2\times5} = 3^{10} = 59\,049$

$5^6 = 5^{3\times2} = (5^2)^3 = (5^3)^2$

3° Multiplication de nombres différents à une même puissance

$a^n \times b^n = \underbrace{a \times a \times ... a}_{\text{n termes}} \times \underbrace{b \times b \times ... b}_{\text{n termes}} = \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times ... (a \times b)}_{\text{n termes}} = (a \times b)^n$

Ex. : $2^7 \times 5^7 = (2 \times 5)^7 = 10^7$

$21^4 = (3 \times 7)^4 = 3^4 \times 7^4$

On ne peut rien faire avec des nombres différents à des puissances différentes. $a^n \times b^p = ???$ De même on ne peut rien faire avec des sommes. $a^n + a^p = ???$ $a^n + b^n = ???$

4° Puissance négative

$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ donc : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ et $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Ex. : $5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ $\quad 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

5° Puissance de nombres négatifs

$(-a)^n = (-1 \times a)^n = (-1)^n \times (a)^n = (-1)^n \times a^n$

Or, si n est pair, $(-1)^n = 1$ d'où un nombre négatif élevé à une puissance paire est positif.

Et si n est impair, $(-1)^n = -1$ d'où un nombre négatif élevé à une puissance impaire est négatif.

Ex. : $(-3)^4 = +3^4 = 81$ l'exposant 4 porte sur toute la parenthèse.

mais $-3^4 = -81$ sans parenthèse, l'exposant 4 ne porte que sur le 3.

> Ne pas confondre les puissances avec la multiplication.
> Erreur 1 : $3^2 = 9$ et non pas 6 !
> Erreur 2 : $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$ et non pas - 4 !

III. PUISSANCES DE DIX

1° Calcul d'une puissance de 10

> Pour tout nombre entier positif n : $10^n = 1\underbrace{0.....0}_{n\ zéros}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,.....0}_{n\ zéros}1$

Ex. : $10^5 = 100000$ et $10^{-5} = 0{,}00001$

2° Multiplier un nombre par une puissance de 10

> Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de n chiffres vers la droite.
> Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de n chiffres vers la gauche.

Ex. : $2{,}78 \times 10^4 = 27800$ et $2{,}78 \times 10^{-4} = 0{,}000278$

3° Règles de calcul avec les puissances de 10

> Quels que soient m et n, des nombres entiers relatifs :
> $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ $\quad \dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ $\quad \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$ $\quad (10^m)^n = 10^{n\times m}$

Ex. : $10^4 \times 10^{-2} = 10^2$ $\quad \dfrac{10^5}{10^3} = 10^2$ $\quad \dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$ $\quad (10^2)^3 = 10^6$

IV. ECRITURE SCIENTIFIQUE

La forme scientifique d'un nombre est $a \times 10^n$ avec n entier relatif et $1 \le a < 10$.
L'exposant de 10 correspond au déplacement de la virgule pour obtenir le nombre a.
Si le nombre est plus petit que 1, la puissance de 10 sera négative.
Si le nombre est plus grand que 1, la puissance de 10 sera positive.

Ex. : $0{,}023 = 2{,}3 \times 10^{-2}$ On déplace la virgule de 2 rangs et 0,023 est inférieur à 1.

$56\,300\,000 = 5{,}63 \times 10^7$ On déplace la virgule de 7 rangs et 56 300 000 est supérieur à 1.

Chapitre IV : CALCUL LITTERAL

I. ORDONNER ET REDUIRE

1° Réduire des sommes

Ordonner et réduire une expression algébrique consiste à ranger (ordonner) les différents termes constituant cette expression suivant les puissances décroissantes de x (ou autre inconnue), puis de les regrouper pour les calculer (réduire).
On peut alors utiliser la propriété suivante : ba + ca = (b+c)a pour tous nombres a, b et c relatifs.

Ex. : $A = -x^2 - 3x^3 - 7 + 4x^2 - 5x + 2x^3$

$A = -3x^3 + 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 5x - 7$ (ordonner)

$A = (-3+2)x^3 + (-1+4)x^2 - 5x - 7$ (réduire)

$A = -x^3 + 3x^2 - 5x - 7$

> Les x^3 et les x^2 ainsi que les x sont des espèces complètement différentes même s'ils ont tous été engendrés par x.
> On ne peut donc pas additionner ou soustraire des x^3 et des x^2.
>
> C'est ce qu'on appelle ne pas additionner des carottes et des poireaux !
>
> Ex. : $6x^5 - 4x^2 \neq 2x^3$

2° Réduire des produits

Multiplier plusieurs facteurs entre eux peut se faire dans n'importe quel ordre.

Ex. : $3x \times 7x = 3 \times 7 \times x \times x = 21x^2$

II. DEVELOPPER

1° Distributivité et double distributivité

Développer consiste à transformer un produit en somme.
Pour cela, on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou la double distributivité) :

k (a + b) = ka + kb
ou encore
(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd

Ex. : $2(3x - 5) = 2 \times 3x - 2 \times 5 = 6x - 10$

$-3(x - 4) = -3 \times x - 3 \times (-4) = -3x + 12$

$(x-5)(2x+3) = \underbrace{x \times 2x}_{\Uparrow} + x \times 3 - 5 \times 2x - 5 \times 3 = 2x^2 + 3x - 10x - 15 = 2x^2 - 7x - 15$

Attention ! Ce genre d'écriture est ***très dangereux***. Il vaut mieux écrire directement $2x^2$.

Pour éviter les fautes de signes qui sont des fautes graves, il vaut mieux prendre son temps et passer par des étapes intermédiaires. Ainsi, dans le cas d'un double produit, on commencera par développer entre parenthèses le produit contenant des « x », avant de distribuer avec la multiplication par un nombre, encore plus s'il est négatif.

Ex. : $A = (2x-1)(3x-5) - 5(x+1)(x-4)$

$A = (6x^2 - 10x - 3x + 5) - 5(x^2 - 4x + x - 4)$

$A = (6x^2 - 13x + 5) - 5(x^2 - 3x - 4)$

$A = (6x^2 - 13x + 5) - (5x^2 - 15x - 20)$

$A = 6x^2 - 13x + 5 - 5x^2 + 15x + 20$

$\boxed{A = x^2 + 2x + 25}$

2° Addition et parenthèses

Lorsque les parenthèses sont précédées du signe « + » et qu'il n'y a pas de signe « x » ou « ÷ » derrière, on peut retirer les parenthèses.

Ex. : $4x + (2x-5) = 4x + 2x - 5 = 6x - 5$

3° Soustraction et parenthèses

Lorsque les parenthèses sont précédées du signe « - » et qu'il n'y a pas de signe « x » ou « ÷ » derrière, on peut retirer les parenthèses en changeant le signe de tous les termes intérieurs à la parenthèse.

Ex. : $4 - (3x-5) = 4 - 3x + 5 = -3x + 9$

Chapitre V : EQUATIONS ET RESOLUTIONS DE PROBLEMES

I. DEFINITION D'UNE EQUATION DU PREMIER DEGRE

Une équation du premier degré à une inconnue x peut s'écrire sous la forme $ax + b = cx + d$.
Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue x (ou une autre lettre) qui **vérifient l'égalité** (c'est-à-dire pour laquelle l'égalité est vraie).

Ex. : $2x + 5 = 3$

(-1) est solution de l'équation car $2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

II. RESOLUTION D'UNE EQUATION DU PREMIER DEGRE

1° Réduction des membres

Dans un premier temps, pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue x, on écrit cette équation sous la forme $ax + b = cx + d$ en réduisant chaque membre si nécessaire.

Ex. : $2x - 7 + 3x + 11 = 5x + 2 - 3x - 5$

$5x + 4 = 2x - 3$

2° Opérations et égalisation

Puis, on se ramène à une équation du type $ax = b$. (Les termes en x à gauche et le reste à droite). On utilise pour cela la propriété suivante :

« Quand on ajoute ou soustrait un même nombre relatif aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité ».

Ex. :

$$5x + 4 = 2x - 3$$
$$5x + 4 - \mathbf{4} = 2x - 3 - \mathbf{4}$$
$$5x = 2x - 7$$
$$5x - \mathbf{2x} = 2x - 7 - \mathbf{2x}$$
$$3x = -7$$

Et pour résoudre l'équation du type $ax = b$, on applique la propriété suivante :

« Quand on multiplie ou divise par un même nombre relatif non nul les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité ».

Ex. :

$$3x = -7$$
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times 3x = -7 \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$
$$x = -\frac{7}{3}$$

3° Conclusion

On peut enfin conclure en encadrant le résultat avec une petite phrase du type « La solution de l'équation est : … ».

Ex. : La solution de l'équation est : $\boxed{x = -\frac{7}{3}}$.

III. MISE EN EQUATION ET RESOLUTION D'UN PROBLEME

Même si la réponse semble parfois évidente, il est nécessaire de rédiger toutes les étapes de la résolution :
1°/ choix de l'inconnue
2°/ mise en équation du problème
3°/ résolution mathématique des équations
4°/ conclusion rédigée en français

Ex. : Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est égale à 126.

1° Choix de l'inconnue

On donne un nom à l'inconnue (le nombre recherché).
Soit x le plus petit entier recherché.
Les trois entiers consécutifs sont alors : x, x + 1, x + 2.

2° Mise en équation du problème

Leur somme	vaut	126	(données en français)
$x + (x + 1) + (x + 2)$	$=$	126	(équation mathématique)

3° Résolution mathématique de l'équation

$x + x + 1 + x + 2 = 126$
$3x + 3 = 126$
$3x = 126 - 3$
$3x = 123$

$$x = \frac{123}{3}$$

$\boxed{x = 41}$

4° Conclusion rédigée en français

Les trois entiers consécutifs sont : 41, 42 et 43.

Chapitre VI : ORDRE ET OPERATIONS

I. DEFINITIONS

1° Comparaison

Une inégalité correspond au résultat de la comparaison de deux nombres. On utilise alors les symboles $\leq, <, \geq, >$.

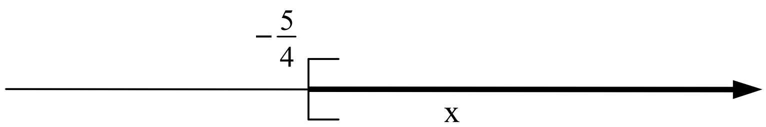
Ex. : -8 < 4 et 3,5 > - 2,5

Le symbole $\leq$ signifie « est inférieur ou égal à », le symbole < signifie « est strictement inférieur à ».

Le symbole $\geq$ signifie « est supérieur ou égal à », le symbole > signifie « est strictement supérieur à ».

On peut représenter graphiquement le résultat d'une inégalité composée d'une inconnue x sur une demi-droite.

Ex. : Si $x \geq -\frac{5}{4}$, on peut représenter l'inégalité de la manière suivante :



Pour comparer deux nombres, suivant le signe de la différence, on peut dire quel est le plus grand et quel est le plus petit.
Si a – b > 0 alors a est plus grand que b.
Si a – b = 0 alors a est égal à b.
Si a – b < 0 alors a est plus petit que b.

Ex. : 2 – 5 = - 3 < 0 donc 2 est plus petit que 5.
$2 - x < 0$ nous permet de dire que $2 < x$.

2° Signe

Pour dire qu'un nombre est négatif ou positif, on peut utiliser une inégalité.

Ex. : Si x est strictement négatif, on peut écrire : $x < 0$.
Si x est positif ou nul, on peut écrire : $x \geq 0$.

II. ORDRE ET OPERATIONS

1° Ordre et addition (ou soustraction)

Si on ajoute (ou que l'on retranche) un même nombre aux deux membres de l'inégalité, l'ordre est conservé.

Ex. : $x < 3$ alors $x + 2 < 3 + 2$ soit $x + 2 < 5$ (addition)
$3 < 5$ alors $3 - 4 < 5 - 4$ soit $-1 < 1$ (soustraction)

2° Ordre et multiplication (ou division)

a - Multiplication (ou division) par un nombre positif

Si on multiplie (ou divise) par un même nombre positif les deux membres de l'inégalité, l'ordre est conservé.

Ex. : $x \le 2$ alors $x \times 3 \le 2 \times 3$ soit $3x \le 6$

$2 < 7$ alors $\frac{2}{2} < \frac{7}{2}$ soit $1 < \frac{7}{2}$

b - Multiplication (ou division) par un nombre négatif

Si on multiplie (ou on divise) par un même nombre négatif les deux membres de l'inégalité, l'ordre, c'est-à-dire le sens de l'inégalité, est inversé.

Ex. : $3 < 8$ alors $\frac{3}{-3} > \frac{8}{-3}$ soit $-1 > \frac{-8}{3}$

$x \le 3$ alors $x \times (-2) \ge 3 \times (-2)$ soit $-2x \ge -6$

III. ENCADREMENTS ET VALEURS APPROCHEES

1° Encadrements

Soient x et y deux nombres relatifs tels que : $x < y$. Si a est compris entre x et y, alors on écrit **l'encadrement** $\boldsymbol{x \le a \le y}$ et on dit que **a est encadré par x et y**.
L'encadrement est **d'amplitude $y - x$** (distance entre x et y).

Ex. : 2,3 est encadré par 2 et 3. On peut écrire l'encadrement : $2 \le 2{,}3 \le 3$.
L'amplitude de l'encadrement est : 3-2 = 1.

2° Troncatures

Dire qu'un nombre a est la troncature au dixième d'un nombre x veut dire que x est un nombre tel que : $a \le x < a + \frac{1}{10}$.

Ex. : 2,8 est la troncature au dixième de 2,879 car $2{,}8 \le 2{,}879 < 2{,}8+0{,}1$.

3° Arrondis

Pour trouver l'arrondi d'un nombre au dixième, on regarde le chiffre des centièmes. Si celui-ci est supérieur ou égal à 5, on arrondit au supérieur le chiffre des dixièmes. Si celui-ci est inférieur à 5, on garde uniquement le chiffre des dixièmes.

Ex. : 2,9 est l'arrondi au dixième de 2,85 car le chiffre des centièmes est un 5.
2,8 est l'arrondi au dixième de 2,84 car le chiffre des centièmes est un 4.

Chapitre VII : UTILISATION DE LA PROPORTIONNALITE

I. PROPORTIONNALITE ET PRODUIT EN CROIX

1° Définition

« a et b sont proportionnels à c et d » signifie que pour passer de **a** à **b** et de **c** à **d**, il faut multiplier par un même coefficient. Ce qui revient à écrire : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ou encore avec le produit en croix : $a \times d = b \times c$.

2° Tableau de proportionnalité et produit en croix

Lorsque des couples de décimaux (ou de fractions) sont proportionnels entre eux, on peut les placer dans un tableau de proportionnalité.

(a ; b) est proportionnel à (c ; d)

$\times k$	a	c	e	$\times \frac{1}{k}$
	b	d	f	

k est le **coefficient de proportionnalité**. $\frac{1}{k}$ est aussi coefficient de proportionnalité.

Et on a : $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

Lorsque l'on résout un problème concret, les lignes (ou les colonnes, ou parfois les deux) ont des **intitulés**. Cela permet de résumer clairement et simplement un énoncé, et de mettre en évidence la problématique.

Ex. :Tous les samedi, M. Martin tond sa pelouse et utilise 3 litres d'essence qui lui reviennent à 3,15 €.
Ce week-end, il entreprend de la tondre deux fois de suite pour pouvoir jouer au croquet.
Combien devra-t-il payer au pompiste ?

Soit x la somme que M. Martin devra au pompiste.

	Unités	1 tonte	2 tontes
Volume d'essence	(en litres)	3	6
Prix à payer	(en euros)	3,15	x

Ce tableau se lit de la manière suivante : pour 3 litres d'essence, il faut payer 3,15 €
pour 6 litres d'essence, combien faut-il payer ?

Propriété :

Dans un tableau de proportionnalité, tous les produits en croix sont égaux.
Par exemple, dans le tableau suivant on a : a x d = b x c ou a x f = e x b ou c x f = e x d.

a	c	e
b	d	f

Réciproquement, si tous les produits en croix d'un tableau sont égaux alors c'est un tableau de proportionnalité.

3° Quatrième proportionnelle

Trouver la quatrième proportionnelle, dans un tableau de proportionnalité comme celui ci-dessous, consiste à trouver la valeur de x grâce au produit en croix.

Volume d'essence	(en litres)	1	3	6
Prix à payer	(en euros)	1,05	3,15	x

D'après le produit en croix, on peut écrire : $3.x = 6 \times 3{,}15$

Soit : $x = \dfrac{6 \times 3{,}15}{3} = 2 \times 3{,}15 = 6{,}30$

On aurait aussi pu écrire : $1.x = 6 \times 1{,}05$

$x = 6{,}30$

On remarque que si pour passer de la 1^re^ à la 2^e^ <u>ligne</u>, il faut multiplier par 1,05, pour passer de la 2^e^ à la 3^e^ <u>colonne</u>, il faut multiplier par 2 : $3{,}15 \times 2 = 6{,}30$.

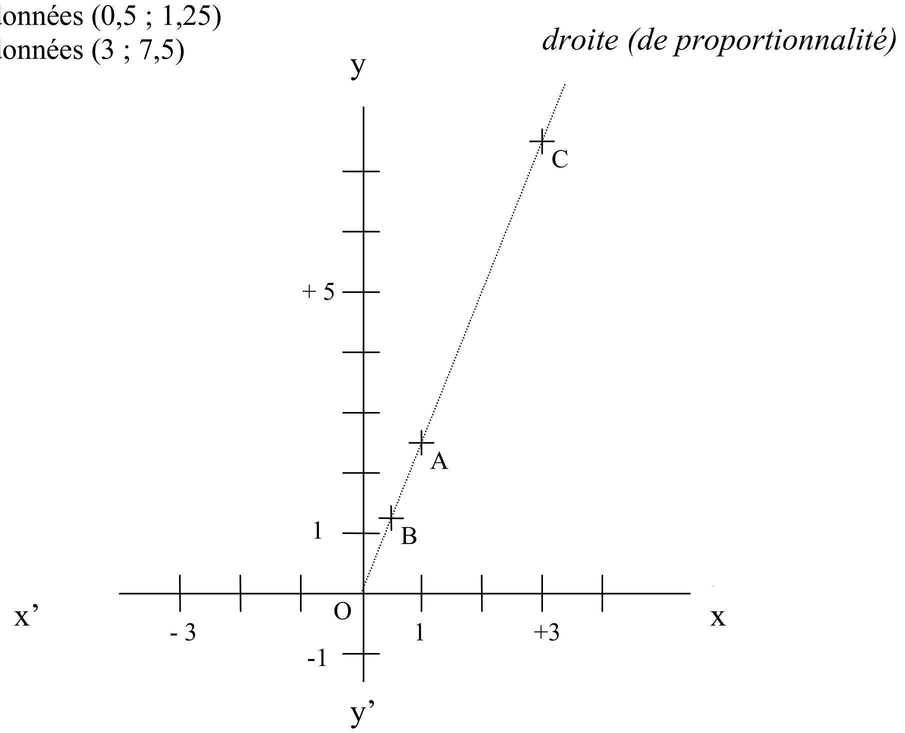
II. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE

On considère la situation de proportionnalité suivante :

1	0,5	3
2,5	1,25	7,5

On peut représenter ce tableau par trois points du plan : A, B, C.

A de coordonnées (1 ; 2,5)
B de coordonnées (0,5 ; 1,25)
C de coordonnées (3 ; 7,5)



On trouve une propriété très importante de la proportionnalité : tous les points du graphique sont <u>alignés</u> sur une droite qui passe par l'<u>origine</u>. Cette propriété permet de reconnaître un tableau de proportionnalité. Réciproquement, si tous les points d'un graphique sont alignés avec l'origine du repère, alors il s'agit d'une situation de proportionnalité.

III. PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE COURANTS

1° Calculs avec des pourcentages

Un pourcentage est une fraction (un rapport) dont le dénominateur est 100.

<u>Ex.</u> : $18\% = \dfrac{18}{100}$

On parle toujours du pourcentage de quelque chose <u>par rapport</u> à autre chose.

Calculer **y % d'une quantité** a, c'est chercher $b = \dfrac{y}{100} \times a$.

Ex. : 15% de 50 c'est $\frac{15}{100} \times 50 = 7,5$

Calculer **quel pourcentage** de a représente b, c'est calculer $y = \frac{b}{a} \times 100$.

Ex. : Calculer le pourcentage que représente 12g de matière grasse dans un yaourt de 120g.

Cela représente $\frac{12}{120} \times 100 = 10$. Il y a 10% de matière grasse par rapport à la masse totale du yaourt.

Si le yaourt pesait 100 g, il y aurait 10 g de matière grasse. C'est bien un cas de proportionnalité.
On peut donc le résumer dans un tableau :

Masse de matière grasse	grammes	12	x
Masse de yaourt	grammes	120	100

2° Calculs avec des échelles de longueurs

Sur une carte ou sur un plan, les distances sont proportionnelles aux distances réelles. Le coefficient de proportionnalité s'appelle **l'échelle de la carte**.

Ex. : Sur une carte à l'échelle 1/100 000, 1 cm représente 100 000 cm sur le terrain.

On peut là encore utiliser un tableau :

	Unité	**Echelle**	
Mesures sur la carte	cm	1	5
Mesures réelles	cm	100 000	500 000

> **Attention !**
>
> Il n'y a ici aucune unité d'indiquée. En effet dans un problème d'échelle, mesures sur la carte et mesures réelles doivent être dans la même unité.
>
> A nous de choisir la plus pratique.

On peut aussi traduire l'échelle en un tableau de proportionnalité plus pratique à utiliser, où les mesures sur la carte ont leur unités, et les mesures réelles la leur.

Ex. : Sur une carte à l'échelle 1/200 000, 1 cm représente 200 000 cm soit 2 km sur le terrain.

	Unités	**Echelle**	
Mesures sur la carte	cm	1	5
Mesures réelles	km	2	10

3° Calculs avec des vitesses

a - Vitesses

> La vitesse moyenne se calcule avec la formule suivante :
>
> $$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$
>
> On en déduit les formules suivantes :
>
> $$\text{temps de parcours} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{vitesse moyenne}}$$
>
> $$\text{distance parcourue} = \text{temps de parcours} \times \text{vitesse moyenne}$$

Ex. : Un automobiliste qui parcourt 400 km en 4 heures a une vitesse moyenne de :

$$\frac{400}{4} = 100 \text{ (en km/h)}$$

Cela signifie que s'il a roulé à vitesse constante et qu'il ne s'est pas arrêté, son compteur indiquait toujours 100 km/h. Ce cas est très improbable. Il a très bien pu faire une pause déjeuner et repartir sur les chapeaux de roue à 130 km/h.
C'est ce qui différencie la vitesse moyenne (100 km/h) de la vitesse instantanée (vitesse à un instant donné, ici 130 km/h).

b - Conversions

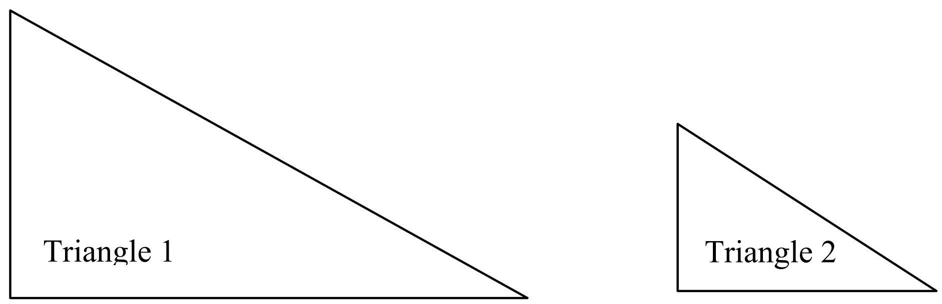
Lorsque l'on veut convertir des vitesses en une autre unité, il faut exprimer la distance parcourue dans la nouvelle unité et le temps de parcours dans la nouvelle unité.
Par exemple, si on veut convertir 3,6 km/h en m/s :

3,6 km = 3600 m et 1 h = 3600 s d'où : $v = \frac{3600}{3600} = 1\ m/s$

4° Agrandissements et réductions

Quand on réduit ou quand on agrandit une figure, les dimensions de la nouvelle figure obtenue sont proportionnelles aux dimensions de la figure de départ et les mesures des angles sont les mêmes.

Par exemple, pour passer du triangle 1 au triangle 2, on a réduit chaque longueur de moitié. Les angles ont été conservés. C'est une réduction de coefficient 0,5.



Chapitre VIII : TRAITEMENT DE DONNEES

I. VOCABULAIRE

Dans de nombreuses disciplines, on doit recueillir des informations sur des objets très nombreux. Pour étudier les résultats, on les présente sous forme de tableaux ou de graphiques. Les relevés statistiques sont faits sur un ensemble de personnes ou objets appelé **population**.
Ex. : Les élèves d'un collège, un stock d'ordinateurs, les chevaux d'un haras...

Ensuite, on répartit cette population suivant différents critères ou **caractères**. Il peut y avoir des caractères **qualitatifs** (couleur, forme, etc.) ou **quantitatifs** (qui peuvent se compter ou se mesurer : nombre d'habitants, surface, etc.).

II. EFFECTIFS, FREQUENCES ET POURCENTAGES

1° Effectifs et fréquences

Les différents groupes de personnes (ou d'objets) étudiés forment des classes. Et le nombre d'« objets » que l'on compte dans chaque classe est nommé **effectif**.
Enfin, on peut aussi comptabiliser les effectifs en **fréquence**. C'est le rapport entre l'effectif de la classe et l'effectif total. Il s'écrit sous la forme d'un **nombre décimal** ou **d'un pourcentage** (en multipliant le nombre décimal de la fréquence par 100).

Ex. : Un professeur de mathématiques de 4^e demande leur âge à ses élèves.

Population : les élèves de la classe de 4^e.
Caractère : l'âge des élèves, caractère quantitatif
Classes : 11 ans, 12 ans, 13 ans, 14 ans, 15 ans...

Classes	Effectifs	Fréquences
11 ans	2	$\frac{2}{30} = 0{,}067 = 6{,}7\ \%$
12 ans	5	$\frac{5}{30} = 0{,}167 = 16{,}7\ \%$
13 ans	15	$\frac{15}{30} = 0{,}5 = 50\ \%$
14 ans	8	$\frac{8}{30} = 0{,}267 = 26{,}7\ \%$
15 ans	0	0
Total	30	$\frac{30}{30} = 1 = 100\ \%$

2° Effectifs et fréquences cumulées

Ex. : Etude de l'âge des 30 adhérents à un club de foot.

Population : adhérents du club de foot
Caractère : âge des adhérents, caractère quantitatif

Age (année)	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Effectif	3	10	6	7	4
Effectif cumulé	**3**	3 + 10 = **13**	13 + 6 = **19**	19 + 7 =**26**	26 + 4 = **30**
Fréquence	0,1	0,33	0,2	0,23	0,13
Fréquence cumulée	**0,1**	**0,43**	**0,63**	**0,86**	**0,99 = 1**

On peut ainsi lire qu'il y a 19 membres âgés de moins de 14 ans. Ou qu'il y en a 43% qui ont moins de 13 ans.

3° Pourcentage lors d'un regroupement

Pour calculer le pourcentage de regroupement de deux groupes dont on connait les pourcentages respectifs, il faut : calculer l'effectif de chaque groupe, ajouter les effectifs de chaque groupe, calculer l'effectif total et ensuite calculer le pourcentage demandé.

Ex. : Dans une entreprise possédant 650 techniciens et 350 cadres, 40 % des techniciens et 20% des cadres utilisent les transports en commun. Quel est le pourcentage de salariés de cette entreprise qui utilisent les transports en commun ?

1) 40% de 650 techniciens correspond à 260 salariés et 20% de 350 cadres correspond à 70 salariés soit un total de 330 salariés
2) Il y a 650+350 = 1000 salariés soit un pourcentage de : 330/1000 x100= 33% qui utilisent les transports en commun.

III. MOYENNE D'UNE SERIE STATISTIQUE

1° Moyenne

La moyenne d'une série statistique est la somme de tous les nombres de cette série divisée par l'effectif total.

Ex. : La moyenne des notes 10, 12, 8 et 10 est : $\dfrac{10+12+8+10}{4}=10$

2° Moyenne pondérée

Pour calculer la moyenne pondérée par un coefficient, on multiplie chaque valeur par son coefficient de pondération et on divise la somme des produits obtenus par la somme des coefficients.
Ex. : Calcul de l'âge moyen d'un membre d'un club de foot. Ici les coefficients de pondération sont les effectifs.

Age (année)	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Effectif	3	10	6	7	4

Dans cette série on remarque que l'on aura 3 fois le nombre 12, 10 fois le nombre 13, etc.

$$\text{Moyenne}=\frac{12\times3+13\times10+14\times6+15\times7+16\times4}{30}$$

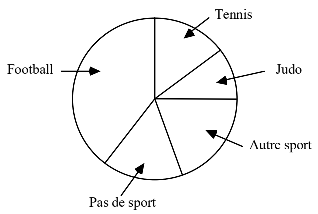
$\text{Moyenne}=\dfrac{419}{30}=13{,}97\approx14$. L'âge moyen d'un membre du club de foot est d'environ 14 ans.

IV. REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RELEVES STATISTIQUES

1° Diagramme circulaire ou semi-circulaire

Les représentations les plus courantes sont les **diagrammes semi-circulaires ou circulaires.** Ils donnent lieu à des calculs de pourcentages que l'on répartira proportionnellement sur un disque (360°) ou un demi-disque (180°).

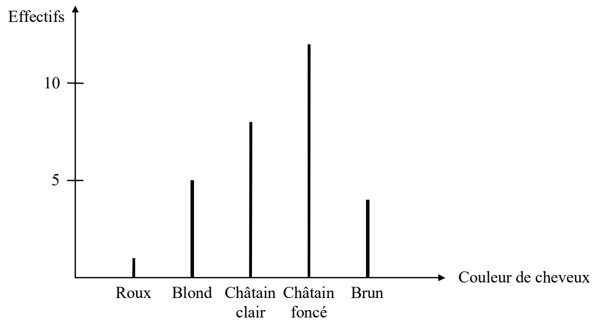
Ex. :



2° Diagramme en bâtons

Les informations qualitatives (plus rarement quantitatives) donnent lieu à des diagrammes en bâtons.

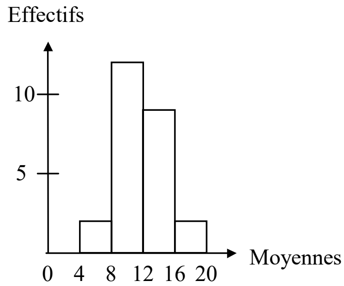
<u>Ex.</u> :



3° Histogramme

Pour représenter les informations <u>quantitatives</u>, on utilise souvent des histogrammes. Ils sont pratiques lorsque l'on a fait des regroupements de données. La seule condition à leur utilisation est d'avoir des classes de <u>même amplitude</u>.

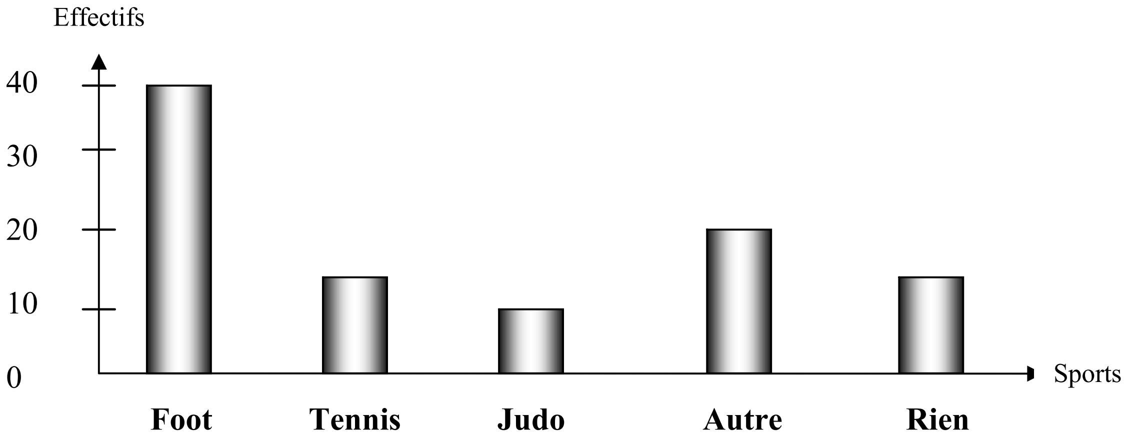
<u>Ex.</u> :



4° Diagramme en tuyau d'orgue

On peut représenter des informations qualitatives avec des tuyaux d'orgue.

<u>Ex.</u> :



5° Diagramme en bande

Le total des effectifs peut être représenté par une bande d'une certaine longueur. On partage ensuite la bande proportionnellement à la valeur de l'effectif de chaque catégorie.

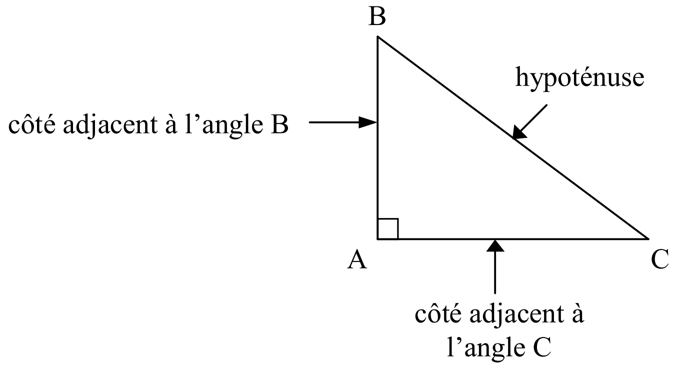
<u>Ex.</u> :

1	**5**	**8**	**12**	**4**
Roux	Blond	Châtain Clair	Châtain Foncé	Brun
0,5 cm	*2,5 cm*	*4 cm*	*6 cm*	*2 cm*

Chapitre IX : THEOREME DE PYTHAGORE

I. DEFINITIONS

Un triangle rectangle est un triangle possédant un angle droit. Le côté opposé à cet angle est appelé **hypoténuse**. C'est le plus grand côté. Il y a aussi deux angles aigus. On appellera le côté formant l'angle avec l'hypoténuse, le **côté adjacent** à cet angle.

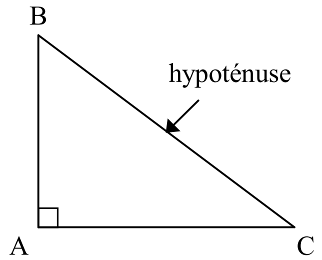


II. THEOREME DE PYTHAGORE

1° Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Ceci permet de calculer le troisième côté d'un triangle rectangle si l'on en connaît déjà deux.

Ex. : BA = 5 cm BC = 7 cm



$BC^2 = AB^2 + AC^2$ d'où $AC^2 = BC^2 - AB^2$ soit $AC^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$

Pour passer de AC^2 à AC on utilise une « racine carrée » : $AC = \sqrt{24}$. Pour connaître la valeur approchée de $\sqrt{24}$, on utilise la calculatrice en tapant, suivant la marque et le modèle :

$\boxed{24}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ ***4,9*** *ou* $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{24}$ $\boxed{=}$ ***4,9*** *ainsi* $\sqrt{24} \approx 4{,}9$ donc $\boxed{AC \approx 4{,}9 \text{ cm}}$

2° Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Attention de ne pas confondre la réciproque avec le théorème, sinon on aboutit à une évidence du type : 25 = 25 ! C'est pourquoi il faut apprendre par cœur la réciproque.

Ex. : *AB = 3 cm AC = 4 cm BC = 5 cm*

Le triangle ABC est-il rectangle ?

Si le triangle ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC], le côté le plus grand.

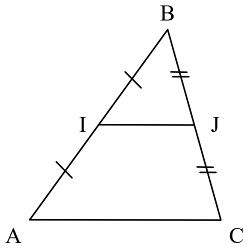
Or $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ Et $BC^2 = 5^2 = 25$

On a bien $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est donc rectangle en A.

Chapitre X : MILIEUX ET DROITES PARALLELES D'UN TRIANGLE

I. THEOREME DE LA DROITE DES MILIEUX

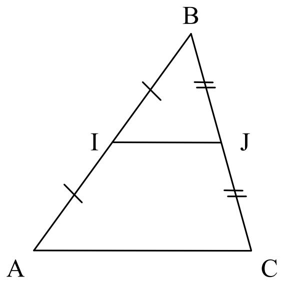
1° Théorème de la droite des milieux



$$\left.\begin{array}{l}\text{I milieu de }[AB]\\ \text{J milieu de }[BC]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(IJ)\text{ parallèle à }(AC)\\ IJ=\frac{1}{2}AC\end{array}\right.$$

Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et mesure la moitié de la longueur de ce troisième côté.

2° Réciproque



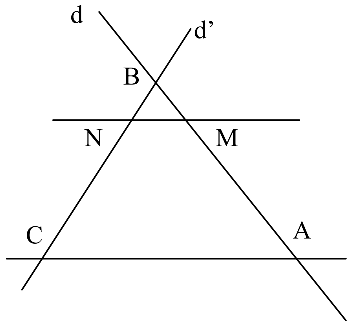
$$\left.\begin{array}{l}\text{I milieu de }[AB]\\ (IJ)\text{ parallèle à }(AC)\\ \text{J est un point de }[BC]\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{J milieu de}[BC]\\ IJ=\frac{1}{2}AC\end{array}\right.$$

Dans un triangle, le segment qui coupe un côté en son milieu, parallèlement à un deuxième, coupe le troisième côté en son milieu et sa mesure vaut la moitié de la longueur du côté auquel il est parallèle.

<u>Attention</u> de ne pas confondre le théorème et la réciproque !

Pour cela il faut bien noter les hypothèses :
- ⇨ 2 milieux : on applique le théorème
- ⇨ 1 milieu et 1 parallèle : on applique la réciproque

II. THEOREME DE THALES



Soit un triangle ABC, N un point de [BC] et M un point de [AB] tels que (MN) soit parallèle à (AC), on a alors les relations :

$$\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AC}$$

Pour énoncer correctement le théorème de Thalès, on commence toujours par le point d'intersection des droites sécantes en mettant la plus petite longueur sur la plus grande : $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}$

Le dernier rapport est obtenu en « rayant » le point d'intersection :

$$\frac{\cancel{B}\mathbf{M}}{\cancel{B}\mathbf{A}}=\frac{\cancel{B}\mathbf{N}}{\cancel{B}\mathbf{C}}=\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{AC}}$$

Chapitre XI : TRIANGLE RECTANGLE, CERCLE ET BISSECTRICES

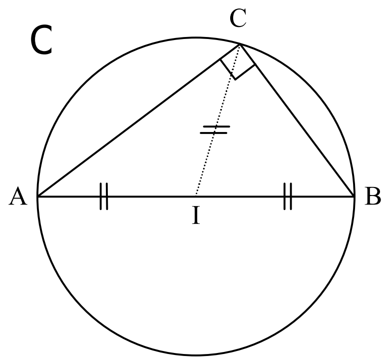
I. CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

1° Propriétés

Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. L'hypoténuse est donc le diamètre du cercle circonscrit.

La médiane issue de l'angle droit d'un triangle rectangle est un rayon du centre du cercle circonscrit donc elle a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Si $A\hat{M}B$ est un angle droit, alors le point M appartient au cercle de diamètre [AB]

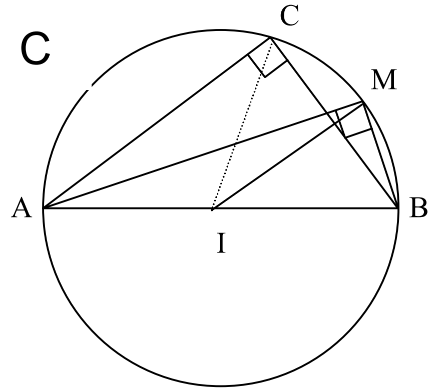


2° Réciproques

Un triangle dont un des côtés est le diamètre du cercle circonscrit est un triangle rectangle.

Un triangle dont la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de la longueur de ce côté est un triangle rectangle.

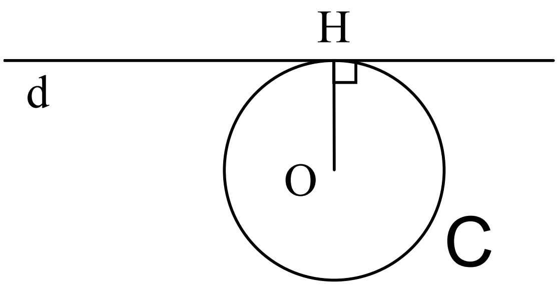
Si le point M, différent de A et B appartient à un cercle de diamètre [AB] alors $A\hat{M}B$ est un angle droit.



II. LES BISSECTRICES

1° Tangente, distance d'un point à une droite

La **tangente** à un cercle est une droite qui coupe le cercle en un unique point. Elle le frôle.



(d) est la tangente au cercle C en H. Et C est tangent à la droite (d) en H.

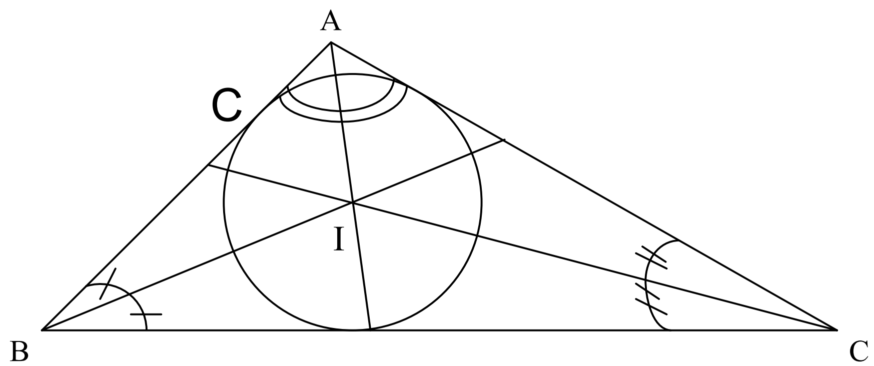
(d) est perpendiculaire au rayon du cercle C passant par le point de contact de la tangente et du cercle.

La **distance** du point O à la droite (d) est la distance OH.

2° Bissectrices

La **bissectrice** d'un angle est la demi-droite issue du sommet de l'angle et qui le partage en deux angles égaux.

Propriété : si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle. Réciproquement, si un point M est équidistant des côtés d'un angle de sommet A alors [AM) est la bissectrice de cet angle.

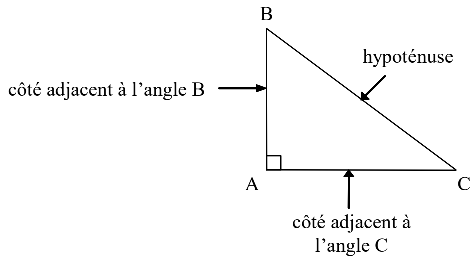


Les trois bissectrices issues des trois angles d'un triangle sont concourantes. Elles se coupent en un point (I) qui est le **centre du cercle inscrit** (C) . Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle, c'est-à-dire qu'il touche chacun des trois côtés en un seul point.

Chapitre XII : TRIANGLE RECTANGLE ET COSINUS D'UN ANGLE

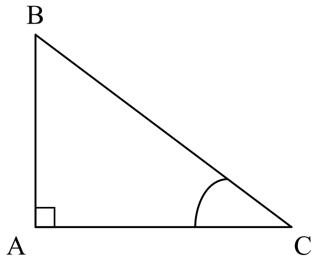
I. COSINUS D'UN ANGLE

Le cosinus d'un angle est le rapport de son côté adjacent sur l'hypoténuse.



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}}}$$

Ex. : Soit un triangle ABC rectangle en A, tel que AC = 4 cm et BC = 5 cm



Le cosinus de l'angle C est le rapport de son côté adjacent [AC] sur l'hypoténuse [BC].

$$\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

Il ne faut pas confondre l'angle avec son cosinus. L'angle s'exprime en degré (°) et le cosinus n'a pas d'unité. De plus il est toujours inférieur à 1. Chaque angle aigu a sa propre valeur de cosinus et réciproquement.

II. CALCUL DE L'ANGLE SI ON CONNAIT LE COSINUS

Si l'on reprend l'exemple ci-dessus, on a : $\cos\hat{C} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Grâce à cette valeur on peut obtenir la mesure de l'angle. Pour cela on utilise la calculatrice. Il faut faire l'une ou l'autre des manipulations, cela dépend des marques et des modèles :

$\boxed{0{,}8}$ $\boxed{\text{INV}}$ ou $\boxed{\text{SHIFT}}$ ou $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ ***36,87***° ou $\boxed{\text{INV}}$ ou $\boxed{\text{SHIFT}}$ ou $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{0{,}8}$ $\boxed{=}$ ***36,87°***

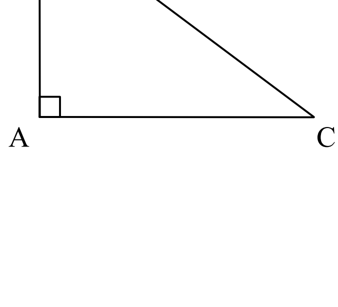
L'angle $\hat{C}$ mesure 36,87°.

III. CALCUL DU COSINUS SI ON CONNAIT L'ANGLE

Il faut faire l'une ou l'autre des manipulations, cela dépend des marques et des modèles :

$\boxed{65}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ 0,423 ou $\boxed{\cos}$ $\boxed{65}$ $\boxed{=}$ 0,423

Le rapport $\frac{AB}{BC} = 0{,}423$. Le cosinus d'un angle de 65° est de 0,423.



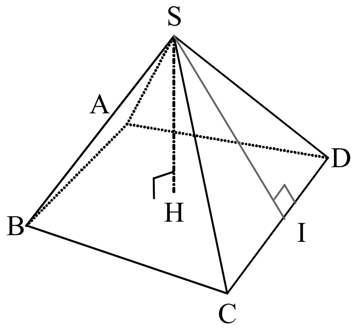
Chapitre XIII : CONFIGURATIONS DANS L'ESPACE :

PYRAMIDES ET CONES DE REVOLUTION

I. LA PYRAMIDE

1° Définition

Une **pyramide** est un solide limité par une base polygonale et des faces triangulaires (appelées **faces latérales**) dont les hauteurs issues du sommet sont appelées **apothèmes**. Le sommet commun des faces latérales est appelé **sommet de la pyramide**.
Une pyramide est dite **régulière** lorsque le polygone de base est régulier et que le pied de la hauteur de la pyramide est le centre de ce polygone.



S est le sommet.
[SH] est la hauteur.
ABCD est la base.
ABS, BCS, CDS et ADS sont des faces.
[SI] est un apothème.

Propriété : les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont de même longueur.

2° Représentation en perspective

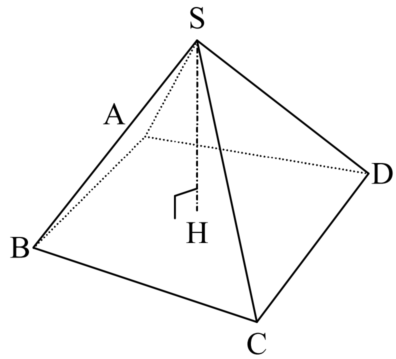
Cette représentation n'a aucune utilité géométrique dans le sens où elle ne montre et ne démontre rien. Elle sert juste à mieux visualiser le volume.

Technique de traçage :

⇨ On commence par représenter la base.
Attention elle n'a pas les mesures réelles, elle est plus aplatie.
(Ex. : on représentera une base rectangulaire par un parallélogramme).

⇨ Puis on trace la hauteur. Elle doit être perpendiculaire à l'horizontale de la feuille pour donner l'idée d'orthogonalité.

⇨ Il ne reste plus qu'à relier les points du polygone de base au sommet pour voir apparaître les faces. Ne pas oublier les pointillés pour les arêtes cachées.



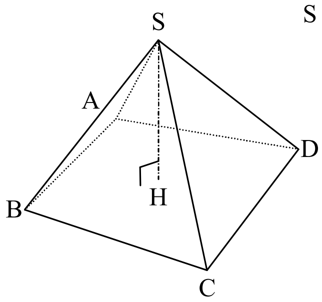
3° Développement ou patron d'une pyramide

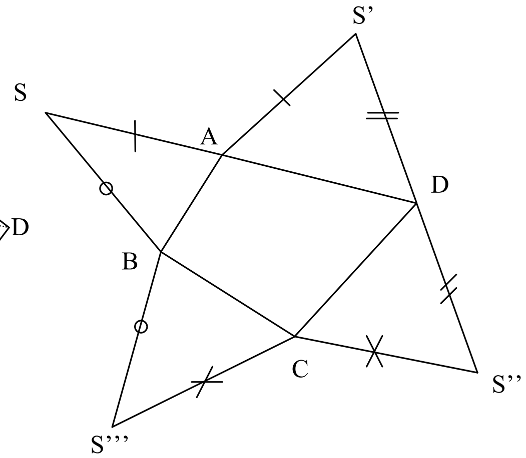
Il sert, après découpage et pliage à « monter » la pyramide.

Technique de traçage :

⇨- On commence par tracer la base. Ici toutes les mesures sont les mesures réelles.

⇨ Puis on trace toutes les faces triangulaires autour de la base.





4° Volume et aire latérale.

a - Volume

Le volume de la pyramide, est donné par la formule : $\boxed{V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base polygonale et h est la hauteur de la pyramide.

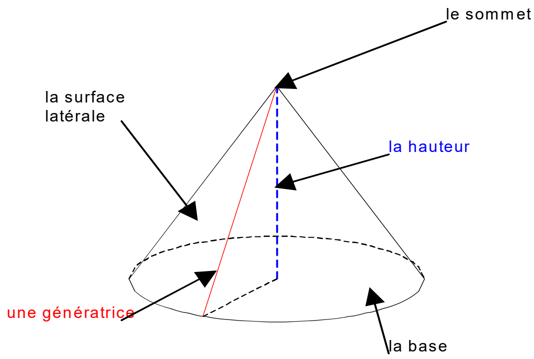
b - Aire latérale

L'aire latérale est la somme des surfaces de tous les côtés.

II. LE CONE DE REVOLUTION

1° Définitions

Un **cône de révolution** est une « pyramide » à base circulaire.
C'est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.
Le segment joignant le sommet à un point du cercle de la base est appelé **génératrice**, c'est aussi l'hypoténuse du triangle rectangle générateur.
La hauteur joint le sommet au centre du cercle de la base.



2° Représentation en perspective

Tout comme pour la pyramide, cette représentation ne sert qu'à visualiser dans l'espace.

Technique de traçage :

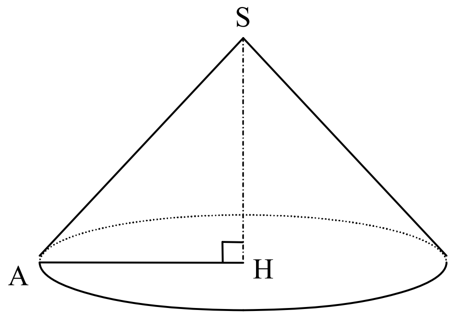
⇨ On commence par tracer la base, non pas avec un cercle, mais avec une ellipse, c'est-à-dire un cercle aplati.

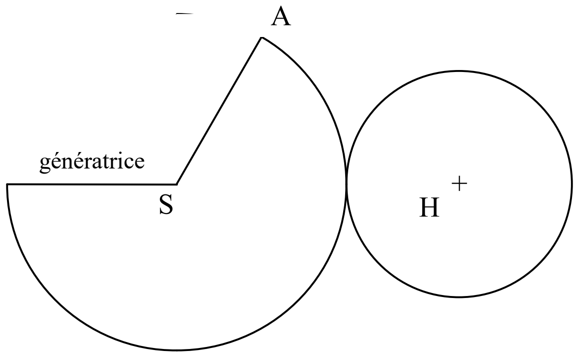
⇨ Puis on trace la hauteur partant du centre de l'ellipse.

⇨ Enfin on dessine les deux génératrices apparentes.

3° Patron d'un cône

Le patron du cône est une portion de disque. C'est grâce à ce développement que l'on pourra calculer le plus facilement la surface latérale du cône.





4° Volume et aire latérale

a - Volume

Le volume du cône, comme pour celui de la pyramide, est donné par la formule : $\boxed{V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h \text{ où } \mathcal{B}}$ est l'aire de la base circulaire, soit : πR^2, et h est la hauteur du cône.

b - Aire latérale

Pour les cônes de révolution la surface vaut : $\boxed{S = \pi.g \times R}$ où g est la longueur de la génératrice et R est le rayon du cercle de base.

Partie B : EXERCICES

- : exercices d’application directe du cours.
- : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
- : exercices plus difficiles ou plus longs.

Chapitre I : OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS

EXERCICE 1.1 - Placer sur un axe d'origine O, les points A, B et C d'abscisses respectives 2,5 ; $-\frac{8}{5}$ et $\frac{7}{3}$. Puis placer A', B' et C' d'abscisses les opposés des abscisses de A, B et C. Que peut-on dire A et A', B et B', C et C' ?

EXERCICE 1.2 - En prenant le centimètre comme unité de longueur, placer les points A, B, C, D, E et F d'abscisses respectives : - 5 ; 2,5 ; $\frac{7}{3}$; $-\frac{3}{5}$; 5 ; - 3 sur un axe.

EXERCICE 1.3 - En reprenant les points de l'exercice **1.2**, calculer les distances AB ; BC ; AD ; DF et AE.

EXERCICE 1.4 (CORRIGÉ PARTIEL) - Pour chacune des valeurs de a et b suivantes, calculer : a + b ; b - a ; 2a - 3b ; - 5a + 2b ; 2ab ; – ab ; a + 7.

a = – 4	b = 5
a = 2	b = – 6
a = 0	b = – 3
a = – 7	b = 1
a = 5,5	b = 2
a = 3,8	b = – 4,7
a = 2	b = 2,1

EXERCICE 1.5 - Effectuer (sans calculatrice) :

$A = (+6) + (+9) + (-3)$

$B = (-1{,}5) + (-3{,}2) + (+4{,}1)$

$C = (-2 + 7) + (1 + 4)$

$D = (7 + 3 - 6) + (5 - 21 - 11)$

$E = (+3 - 2 - 14 + 18) + (9 - 7 + 4) + (-4 + 3 - 2 + 8)$

$F = (-5 + 8 - 4 + 12) - (3 - 15) + (-4 + 2 + 11 - 9 - 11)$

$G = [-4 - (-1) + (-5) + (-8)] - [-5 - (-2) - (+4) - (+7)] - (3 + 2 - 11)$

$H = (-12) + (+7{,}8) + (+0{,}5)$

$I = (-5 + 9 - 3{,}7) + (5{,}2 - 8)$

EXERCICE 1.6 - Si a = + 2,7 et b = – 3,1 , calculer :
a + b ; a – b ; ab ; 2a ; – 3b ; a + (b – a).

EXERCICE 1.7 - Calculer (sans calculatrice) :

$A = (+2{,}7) - (-5{,}4) + (+3{,}2) - (+5{,}6) + (-4{,}3)$

$B = [2{,}3 - (3{,}1 - 7{,}2) + (-3{,}9 + 1)] - [(3{,}2 - 2{,}8) - 5{,}7]$

$C = (42 + 7)(1 + 4)$

$D = (7 + 13 - 6)(8 - 27 + 71)$

EXERCICE 1.8 - Même exercice que le **1.4** avec a = – 3,4 et b = + 1,9.

EXERCICE 1.9 - Calculer astucieusement (sans calculatrice) :

$A = (+8{,}9) - (-18) - (7{,}5) + (-4{,}1) - (+3)$

$B = (+18) + (-51) - (-3{,}4) + (+7{,}4) - (+3{,}4)$

$C = (-6{,}7) + (-4{,}05) - (+0{,}35) - (-5{,}1) - (-2)$

$D = (-8{,}75) - (-4{,}5) + (-0{,}25) - (+1{,}5) - (+3)$

EXERCICE 1.10 - Calculer les produits suivants :

a) $0{,}6 \times (-0{,}5)$; $(-3) \times 0{,}8$; $(-0{,}7) \times (-9)$; $0{,}4 \times (-4)$

b) $(-3{,}5) \times (-8)$; $0{,}9 \times (-4{,}5)$; $(-0{,}8) \times 1{,}3$; $(-4{,}7) \times (-3)$

c) $(-0{,}48) \times (-100)$; $0{,}02 \times (-10)$; $(-4{,}5) \times 0{,}1$; $(-1\,000) \times 0{,}96$

EXERCICE 1.11 - Calculer astucieusement :

a) $0{,}5 \times (-13{,}8) \times 2$

b) $(-0{,}5) \times (-26{,}4) \times (-2)$

c) $(-19{,}2) \times 4 \times (-0{,}25)$

d) $0{,}25 \times (-12{,}6) \times (-4)$

e) $(-8) \times 17 \times 0{,}125$

f) $(-23{,}2) \times (-0{,}125) \times 8$

g) $(-0{,}5) \times 0{,}125 \times 9 \times (-2) \times 48$

EXERCICE 1.12 - Donner le signe des quotients suivants :

$\frac{-10}{11} \times \frac{5}{6}$; $\frac{-16}{7} \times \frac{-3}{4}$; $\frac{7}{10} \times \frac{-5}{3}$; $\frac{8}{-9} \times \frac{2}{3}$; $\frac{5}{-12} \times \frac{4}{-3}$; $\frac{-2}{-7} \times \frac{1}{-5}$; $\frac{-8}{3} \times \frac{5}{-4}$.

EXERCICE 1.13 - Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	2		-3		-7	3
y	-3	-4	2	-5		-6
z		7		8	3	
$x+y+z$	9					
$x+y-z$		6			3	
$x-y-z$			-5			-15
$x-y+z$				11		

EXERCICE 1.14 - Placer les neuf nombres : -7 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 dans les cases du tableau suivant afin que les produits des lignes et des colonnes soient égaux aux valeurs indiquées au bout.

			$\to -98$
			$\to 0$
			$\to -30$
$\downarrow$ -20	$\downarrow$ 0	$\downarrow$ 105	

EXERCICE 1.15 - Calculer :

a) $6{,}3 + 1{,}4 \times (-8)$
b) $-15 - 2 \times 17$
c) $12{,}3 - (-5) \times (-7)$
d) $(-4{,}7 + 5{,}7) \times 4$
e) $-1{,}8 - 7 \times (-3) + 1{,}2$
f) $(-3{,}2) \times 5 - 8{,}5 \times (-4) + 7{,}5$

EXERCICE 1.16 - Trouver les expressions qui donnent le même résultat :

$A = -6 + 7 \times (-2) - 8 \times (-5) + (-4) \times 3$
$B = -6 - 7 \times 2 - 8 \times 5 + 4 \times 3$
$C = -6 + (-7) \times 2 + (-8) \times 5 - 4 \times 3$
$D = -6 - 7 \times 2 - 8 \times 5 - 4 \times 3$
$E = -6 - 7 \times 2 + (-8) \times (-5) + 4 \times (-3)$

EXERCICE 1.17

a) Parmi les calculs suivants, trouver :
1) un produit de deux nombres négatifs,
2) une somme d'un nombre négatif et d'un nombre positif,
3) un quotient d'un nombre négatif et d'un nombre positif,

$A = (2-5) \times (-8+3)$
$B = (-3) \times (-3) + (-6)$
$C = (-12-4) \div 10$
$D = (-4 - 2 \times 3) + (-6-2)$
$E = -8 \div (-10+6)$
$F = (-6-4) \times (8-2)$

b) Effectuer les six calculs ci-dessus.

Chapitre II : OPERATIONS SUR LES FRACTIONS

EXERCICE 2.1 - Calculer :

$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} - \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

$\frac{15}{48} + \frac{15}{6} =$

$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{17}{5} =$

EXERCICE 2.2 (CORRIGÉ) - Simplifier les fractions suivantes :

$\frac{48}{90}$; $\frac{114}{1900}$; $\frac{576}{32}$; $\frac{69}{46}$; $\frac{78}{91}$; $\frac{30}{65}$.

EXERCICE 2.3 - Mettre sous forme de fractions irréductibles les nombres décimaux suivants :

1,4 ; $-3{,}25$; 0,008 ; $-2{,}6$; 4,75 ; 0,02.

EXERCICE 2.4 - Calculer :

$\frac{3}{2} + \frac{5}{7} =$

$\frac{3}{7} - \frac{1}{7} + \frac{8}{7} =$

$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} =$

$\frac{12}{21} - \frac{3}{7} =$

$\frac{8}{5} - \frac{4}{9} =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

$\frac{4}{7} - \frac{3}{21} =$

$\frac{3}{7} + \frac{1}{2} =$

EXERCICE 2.5 - Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\dfrac{-5+13}{7}=\dfrac{-5}{7}+\dfrac{13}{7}$

b) $\dfrac{-5+13}{7}=\dfrac{-5}{7}+13$

c) $\dfrac{-5+13}{7}=\dfrac{5+13}{7}$

d) $\dfrac{-5+13}{7}=\dfrac{5-13}{7}$

e) $\dfrac{2}{-5+11}=\dfrac{2}{-5}+\dfrac{2}{11}$

f) $\dfrac{2}{-5+11}=-\dfrac{2}{5+11}$

EXERCICE 2.6 - Mettre au même dénominateur :

$\dfrac{-12}{75}$ et $\dfrac{30}{65}$

$-\dfrac{18}{27}$ et $-\dfrac{15}{35}$

$\dfrac{15}{10}$ et $\dfrac{18}{35}$

EXERCICE 2.7 - Calculer sous forme de fraction irréductible :

$A=3-\dfrac{7}{3}$

$B=\dfrac{105}{4}-1$

$C=\dfrac{11}{9}-\dfrac{13}{3}$

$D=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{159}{75}+\dfrac{9}{5}$

$E=\left(\dfrac{19}{5}-1+\dfrac{3}{16}\right)-\left(2-\dfrac{7}{4}\right)$

$F=\left(-\dfrac{1}{3}+2-\dfrac{3}{4}\right)-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{8}-3\right)+\left(\dfrac{1}{6}+4-\dfrac{5}{12}\right)$

EXERCICE 2.8 - Calculer :

$3\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)=$

$\dfrac{5}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{7}\right)=$

$\dfrac{3}{21}+1=$

$\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=$

$\dfrac{72}{21}\times\dfrac{33}{9}=$

$\dfrac{1}{8}\times2+\dfrac{1}{56}=$

$\dfrac{3}{36}\times\dfrac{7}{6}\times\dfrac{54}{21}=$

$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=$

$\dfrac{22}{36}\times\dfrac{18}{11}=$

$\dfrac{7}{4}\times\dfrac{23}{5}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{7}=$

$\left(2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)\left(3-\dfrac{1}{3}\right)=$

EXERCICE 2.9 - Effectuer les calculs suivants :

$A=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}$

$B=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{3}$

$C=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{5}{3}$

$D=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}$

$E=\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{8}$

$G=\dfrac{13}{4}\times\dfrac{-1}{20}\times\dfrac{8}{3}$

$F=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+1$

$H=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{8}-1+\dfrac{5}{6}+\dfrac{27}{81}-\dfrac{35}{42}-3\right)$

$I=3,5\times10^{-2}-4,2\times10^{-4}$

EXERCICE 2.10 - Compléter les égalités suivantes :

$\dfrac{2}{7}\times\dfrac{?}{?}=1$; $\dfrac{-9}{14}\times\dfrac{?}{?}=1$; $\dfrac{7}{-16}\times\dfrac{?}{?}=1$

En déduire les inverses des nombres suivants :

$\dfrac{2}{7};-\dfrac{14}{9};-\dfrac{16}{7};-\dfrac{7}{16}.$

EXERCICE 2.11 - Calculer les quotients suivants :

a) $\dfrac{-1}{5}\div\dfrac{-2}{7}$; $\dfrac{-3}{7}\div\dfrac{4}{9}$; $\dfrac{15}{8}\div\dfrac{-1}{3}$; $\dfrac{-3}{4}\div\dfrac{-2}{7}$.

b) $\dfrac{11}{5}\div\dfrac{-44}{40}$; $\dfrac{-15}{7}\div\dfrac{20}{21}$; $\dfrac{-18}{34}\div\dfrac{-81}{51}$; $\dfrac{-12}{14}\div\dfrac{24}{21}$.

c) $(-3)\div\dfrac{4}{5}$; $(-6)\div\dfrac{7}{4}$; $15\div\dfrac{-5}{11}$; $(-24)\div\dfrac{6}{5}$.

d) $\dfrac{-1}{4}\div8$; $\dfrac{15}{16}\div(-3)$; $\dfrac{18}{5}\div(-24)$; $\dfrac{-10}{3}\div5$.

EXERCICE 2.12 - Calculer :

$A=\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}\right)\div\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}\right)$

$B=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

$C=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3}\div\left(-1-\dfrac{1}{3}\right)$

$D=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3}\div(-1)-\dfrac{1}{3}$

$E=\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{7+11}$

$F=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+7}{24}$

$G=3-\dfrac{5}{2-6}$

$H=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}}$

EXERCICE 2.13 - Calculer les fractions de fractions de fractions... :

$$A=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \qquad B=\frac{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

EXERCICE 2.14 (CORRIGÉ) - Maxime a tout d'abord dépensé les deux tiers de sa fortune, puis la moitié de ce qu'il lui restait. Quelle fraction de sa fortune lui reste-t-il ?

EXERCICE 2.15 - Aux dernières élections du meilleur professeur Complétude, les quatre cinquième des électeurs ont voté. Les deux tiers des votants ont élu votre professeur. Quelle fraction de l'électorat représentent-ils ?

EXERCICE 2.16 - Une journée est faite de 24h. Quelle fraction de la journée représente une durée de 6h ?15h ? 17h ?
Sur la planète Matthys I, une journée est composée de 10h, 1h de 100 mn et 1 mn de 100s. Quelle heure indiquerait la montre d'un Matheux en voyage à Londres lorsque Big Ben sonnera 6h, 15h, 17h ?

EXERCICE 2.17 - La sécurité sociale rembourse 75% des frais médicaux et une mutuelle, les 4/15 de ce qu'a remboursé la sécurité sociale. Quelle fraction des frais médicaux reste à la charge des malades ?

EXERCICE 2.18 - Amandine et Baudouin se partagent un quatre-quarts proportionnellement à leur âge. Baudouin a 6 ans et Amandine les 2/3 de son âge. Quelles fractions du gâteau représentent les parts d'Amandine et de Baudouin ?

Amandine mange les deux tiers de sa part au déjeuner, les trois quarts du reste au goûter puis donne le reste à sa souris. Alors que Baudouin en mange les trois huitièmes à déjeuner, les cinq sixièmes du reste au goûter et donne le reste à son iguane. Qui a le plus mangé : la souris ou l'iguane ?

EXERCICE 2.19 - Doliphan a échoué sur une île déserte et n'a pour survivre qu'une caisse remplie d'AVAMOLTU (barre chocolatée fort nourrissante). Le premier mois, il mange le cinquième de ses réserves. Le deuxième mois, le cinquième du reste et le troisième mois, le cinquième du nouveau reste. Ecœuré par ce régime, il compte ses provisions : 512.
Combien de barres chocolatées contenait la caisse le jour du naufrage ?
Combien en a-t-il mangé les 1er, 2e et 3e mois ?

EXERCICE 2.20 - D'un baril plein de jus de raisin on soutire d'abord 1/8 du jus, puis les 3/5 de ce qui reste. Il reste alors 560 litres, quelle est la capacité du baril ?

EXERCICE 2.21 - Delphine a bu les deux cinquièmes du litre de jus d'orange en rentrant du collège, puis les trois septième après avoir fini ses devoirs. Quelle fraction du litre reste-t-il dans la bouteille ?

EXERCICE 2.22 - L'araignée (8 pattes) possède les quatre vingt-et-unièmes de pattes d'un mille-pattes. Combien le mille-pattes a-t-il de pattes ?

EXERCICE 2.23 - Victor a enregistré les 7/12 d'une face et les 2/5 de l'autre face d'une cassette de 60 minutes. Combien reste-t-il de temps sur chaque face ?

EXERCICE 2.24 -
Mustapha passe les 2/3 de son temps de connexion sur internet à communiquer avec ses amis et le quart de son temps à rechercher des informations. Il passe le reste de son temps à jouer. Quelle fraction du temps de connexion lui reste-t-il pour jouer ?

Chapitre III : PUISSANCES D'EXPOSANT, ENTIER RELATIF

EXERCICE 3.1 - Calculer :

$A = (-5)^3$ | $B = 2^5 \times 2^3$

$C = (-1)^{103}$ | $D = 2^5 \div 2^3$

$E = (0{,}2)^3$ | $F = (-0{,}0001)^3$

$G = \left[(-3)^2\right]^3$ | $H = (5)^{-2}$

$I = (-5)^3 + (-5)^2 + (-5)^1 + (-5)^0$

EXERCICE 3.2 - Calculer :

$A = 2^{-1} \times 5^{-4} \times 5^6$

$B = (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^0$

$C = (7 \times 5)^3 - 2^3$ | $D = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$E = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{5}{4}$ | $F = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$G = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ | $H = \left(\frac{1}{4}\right)^{3002} \times 4^{3000}$

EXERCICE 3.3 - Mettre les expressions suivantes sous la forme 10^n :

$10\,000\,000$; $1\,000$; $\frac{1}{1\,000\,000}$; $\frac{1}{100\,000\,000}$; $\frac{1}{10\,000\,000\,000}$.

EXERCICE 3.4 - Mettre les expressions suivantes sous la forme 10^n :

$\frac{10\,000}{1\,000}$; $\frac{1\,000}{100\,000}$; $\frac{100}{1\,000\,000}$; $\frac{1\,000}{10}$; $\frac{10^6}{10^4}$;

$\frac{10^3}{10^7}$; $\frac{10}{10^6}$; $\frac{10^9}{10^3}$; $\frac{10^{-5}}{10^3}$; $\frac{10^8}{10^{-2}}$; $\frac{10^{-7}}{10^{-3}}$.

EXERCICE 3.5 - Mettre les expressions suivantes sous la forme 10^n :

$A = 10^{-3} \times 10^7$ | $B = 10^{15} \times 10^{-8}$

$C = 10^{-4} \times 10^{-5}$ | $D = 10^0 \times 10^{-8}$

$E = 10^{-7} \times 10^7$ | $F = 10^9 \times 10^{-14}$

EXERCICE 3.6 - Mettre les expressions suivantes sous la forme 10^n :

$A = \frac{10^8 \times 10^{-4}}{10^3}$ $B = \frac{10^6}{10^9 \times 10^{-3}}$ $C = \frac{10^{-4} \times 10^{-8}}{10^{-7} \times 10^{15}}$

EXERCICE 3.7 - Ecrire les nombres suivants sous forme scientifique :

a) 3700 ; 46 000 ; 381 000 000 ; 87,36 ; – 245,4

b) 0,051 ; 0,003 2 ; 0, 000 295 3 ; – 0,000 008 84

c) 23×10^5 ; 354×10^7 ; $46{,}9 \times 10^{-3}$; $94{,}3 \times 10^{-4}$

d) $0{,}0064 \times 10^7$; $0{,}92 \times 10^3$; $0{,}085 \times 10^{-2}$; 593×10^{-2}

EXERCICE 3.8 - Remplacer le signe # par un nombre pour rendre vraie l'égalité :

a) $3\,200 = 3{,}2 \times 10^{\#}$ $3\,200 = 32 \times 10^{\#}$

b) $65{,}4 = 6{,}54 \times 10^{\#}$ $65{,}4 = 654 \times 10^{\#}$

c) $0{,}873 = 8{,}73 \times 10^{\#}$ $0{,}873 = 873 \times 10^{\#}$

EXERCICE 3.9 - Simplifier les écritures suivantes :

a) $\frac{35 \times 10^9}{7 \times 10^6}$; $\frac{72 \times 10^5}{8 \times 10^9}$; $\frac{1{,}8 \times 10^8}{6 \times 10^4}$

b) $\frac{42 \times 10^{-8}}{14 \times 10^{-3}}$; $\frac{45 \times 10^{-7}}{9 \times 10^{-9}}$; $\frac{2{,}8 \times 10^{-7}}{5{,}6 \times 10^{-5}}$

c) $\frac{17 \times 10^{-4}}{34 \times 10^5}$; $\frac{6{,}3 \times 10^3}{2{,}1 \times 10^{-5}}$; $\frac{4{,}2 \times 10^{-2}}{6 \times 10^5}$

EXERCICE 3.10 (CORRIGÉ) - Effectuer :

$A = 7{,}5 \times 10^{-2} \times 0{,}8 \times 10^4$

$B = 10^{-3} \times 10^3 \times 10^5$

$C = \left(7{,}5 \times 10^{-2} - 0{,}8\right) \times 10^4$

EXERCICE 3.11 - Calculer tout d'abord $3{,}5 \times 4{,}2$ sans calculatrice. Puis en déduire les produits suivants :

a) $3{,}5 \times 10^9 \times 4{,}2 \times 10^5$

b) $3{,}5 \times 10^{-7} \times 4{,}2 \times 10^{-5}$

EXERCICE 3.12 (CORRIGÉ) - Souligner les nombres négatifs :

$(-3)^{17}$; $(-3)^{12}$; -3^{19} ; -3^{12}.

EXERCICE 3.13 - Remplacer le signe Π par un nombre pour que l'égalité soit vraie :

a) $\Pi^6 = 1\,000\,000$; $\Pi^9 = -1$; $\Pi^3 = -216$.

b) $5^{-6} \times 5^{\Pi} = 5^{-10}$; $9^{\Pi} \times 9^{5} = 9^{12}$; $4^{3} \times 3^{\Pi} = 12^{3}$.
c) $(2^{\Pi})^{4} = 2^{28}$; $(25^{2})^{\Pi} = 5^{12}$; $(\Pi^{6})^{4} = 27^{8}$.

EXERCICE 3.14 - Ecrire les nombres sous la forme x^p :

$x^4 \times x^{-3}$; $x^6 \times x$; $x^8 \times x^3 \times x^{-9}$; $\left(x^4\right)^3 \times x$.

EXERCICE 3.15 - Calculer :

a) $(-0{,}3)^3 \times 10^4 - 7 \times 2^3 + (-2)^5 \times 5$

b) $0{,}3^4 \times 10^3 - \left(3^{-2}\right)^3 \times 81 \times 3^3 - 14\,517^0$

c) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^6 - (-1)^{216}$

EXERCICE 3.16 - Simplifier et calculer :

$$A = \frac{3^{12} \times \left(3^4\right)^5}{\left(3^4 \times 3^{12}\right)^2} \qquad B = \frac{15^8}{\left(3^2\right)^4 \times 5^2 \times 5^6}$$

$$C = \frac{(2{,}1 \times 10)^9}{7^5 \times \left(3^3\right)^3 \times 7^4} \qquad D = \left(\frac{6^9 \times (0{,}5)^9}{3 \times 3^8}\right)^2$$

EXERCICE 3.17 - Ecrire les nombres sous la forme $a \times x^p$:

$3x^4 \times 5x$; $(2x)^4 \times 4x$; $8x^5 \times \dfrac{3}{24}x^3 \times x$;

$(0{,}5x)^3 \times 8x$; $\dfrac{x^7}{x^3}$; $\dfrac{5x^4}{x^5}$; $\dfrac{7x^5}{x}$.

EXERCICE 3.18 - Compléter le carré magique (le produit des colonnes, des lignes et des 2 diagonales est le même) :

5^{-4}			$\frac{1}{5^7}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5^2}$	
$\frac{1}{5^3}$	5^3		
5^8	$\frac{1}{5^6}$	5^{-5}	

EXERCICE 3.19 - Simplifier les écritures suivantes :

$\dfrac{a^3b^2}{a^4b}$; $(ab)^3 \times a^{-2}$; $5a^5b^{-4} - 9\dfrac{a^5}{b^4}$; $3a^2 \times (2b)^4$;

$-7b \times (-2a)^3 \times b$; $\dfrac{a^5 \times b \times c^3}{a^7 \times c^2}$.

EXERCICE 3.20 (CORRIGÉ)-

Effectuer les calculs suivants :

a) $4 \times (6+3)^2$

b) $(19 - 3^2) \times 4{,}2$

c) $\left(10 + 2 \times 5^2\right)^2$

d) $2^2 \times (2 + 4 \times 2)^2$

EXERCICE 3.21 -

Ecrire les nombres suivants en écriture scientifique :

a) 58000×10^5
b) 76000000×10^{-4}
c) $0{,}089 \times 10^3$
d) $758{,}49 \times 10^4$

EXERCICE 3.22 - Donner sous la forme a^n :

a) le triple de 3^3
b) le tiers de 3^3
c) la moitié de 2^4
d) le double de 2^4

EXERCICE 3.23 -

En chimie, on décrit la matière comme étant formée d'atomes très petits. Pour simplifier les calculs, on les regroupe par paquets de $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes : les chimistes appellent ces paquets des moles.
On sait qu'un atome de carbone a une masse d'environ $1{,}99 \times 10^{-23}$ grammes.
Quelle est la masse d'une mole de carbone ?

EXERCICE 3.24 - Calculer :

a) $5{,}78 \times 10^3$
b) $42{,}53 \times 10^{-3}$
c) $0{,}00753 \times 10^5$
d) 34585×10^{-4}
e) $0{,}4 \times 10^3$
f) $0{,}0875 \times 10^6$

EXERCICE 3.25 -

Le son se propage à environ $1{,}5 \times 10^3$ mètres par secondes dans l'eau. Le sondeur d'un navire envoie une onde sonore. Il reçoit son écho 0,4 seconde plus tard (temps nécessaire à l'onde pour aller se réfléchir sur le fond de la mer et revenir au navire). Quelle est la profondeur de l'eau sous le navire ?

Chapitre IV : CALCUL LITTERAL

EXERCICE 4.1 – Réduire les expressions suivantes, si possible :

$A = -3x + 6x$

$B = -3(2x+3)$

$C = 7(-10x^2)$

$D = -8x - 14x$

$E = -6x(-9x)$

$F = -8x^2 \times 10$

EXERCICE 4.2 - Développer, réduire et ordonner :

$A = (3x-8)(2x-7)$

$B = (3x+2y) - [-5x - (x+2z-y) - 3z] - [2x - (3y+2z)]$

Calculer la valeur de A et B si $x = -2$; $y = 0{,}5$; $z = -0{,}6$.

EXERCICE 4.3 - Développer, réduire et ordonner :

$A = 5x + 3x^2 + 7x - 6x^2$

$B = (2x-3)(x+7) - (x-2)(x+3)$

$C = (4x-7)(x^2 - 3x + 7)$

$D = [3(x-2) + 5(x+3)] - 2[4(x+3) + 6(x-2)]$

EXERCICE 4.4 - Développer, réduire et ordonner :

a) $(6x-5)^2$

b) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

c) $(a-3)(b+2) - (c-5)(d+1) + 3(b-d)$

d) $[(c-d)-(a+d)] - [e-d-(c+a)] - c$

e) $(5-3x)(5+3x)$

f) $\left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{3}\right)^2$

EXERCICE 4.5 - Développer les expressions :

$(4-x)^2$; $(3x+2y)^2$

$(x^4-3)^2$; $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

$(a-b)^2$; $\left(3x-\frac{5}{3}\right)^2$.

EXERCICE 4.6 - Développer :

$A = (2x-5)(3x+1)$

$B = (x-2)(3x-1)$

$C = (x-3)^2$

$D = (2x-3)(5x-1)$

EXERCICE 4.7 (CORRIGÉ) - Développer :

$A = (5x-3)(2x+3)$

$B = (2x-5)^2$

$C = (2x+1)^2$

$D = (7x+1)(3x-1)$

EXERCICE 4.8 - Développer :

$A = (x+7)(2x-4)$

$B = (2x-3)(x+2) + (x-4)(2x+3)$

$C = -[(-x+7)-(x-3)] - [2-(x-5)]$

$D = x + x + 2(3x-1)$

EXERCICE 4.9 -

A = (3x+4)(5x-2)-(20x-12)

B = 4-3x(2-5x)

Démontrer que A=B.

EXERCICE 4.10 - Développer :

$A = (2x-3)(x+4) - 3x^2(x+4)$

$B = (3x-5)(3x-5)$

$C = (3x-5)(3x+5)$

$D = \left(\frac{x}{2}+3\right)^2$

EXERCICE 4.11 - Développer :

$A = 3(4x+2y) + 6y(5-y)$

$B = x - [-y + (7+x)] + [-7-(x+1)]$

$C = 5(x-4) + 2(5xy+10)$

EXERCICE 4.12 - Développer :

$A = x(x+2) + x(x+3)$

$B = 2x(x-1) - 2x(x+2)$

$C = 3(1+x) - 3x(1+x)$

$D = (x+2)(x+1) + (x+2)(x-1)$

$E = 5(x+2)(x+3) - 3(x+3)(x-1)$

$F = (2x+3)(3x+2) - (x+1)(2x+3)$

EXERCICE 4.13 - Soit :

$A(x) = (7x+3)(2x-5) + (2x+5)(7x+3)$

$B(x) = (2x-7)(3x-1) - (2x-7)^2$

a) Développer A(x)

b) Développer B(x)

EXERCICE 4.14 - Développer :

$A = (4x-5)(x+5) + (-4x+5)(3x+4)$

$B = (7x+2)(x-9) - (9-x)(x-4)$

$C = 2x(1-2x)(12x+3) + (12x+3)(1-2x)$

EXERCICE 4.15 - Développer :

$A = (x-2)(x+3) + 5(x-2)$

$B = (x+3)^2 + 2x(x+3) + x + 3$

$C = (x-3)(2x+7) - (3-x)(x-1)$

$D = (x+3)(2x-5) - (x+3)^2$

$E = (2x-3)(x+5) - (6-4x)(x+7) + 3(2x-3)^2$

$F = (x-4)(3x-5) - (4-x)(15-9x)$
$\quad - 2(x-4)(x+4) + (x-4)$

EXERCICE 4.16 -

a) Développer $A = (x+1)(x-1)$

b) En déduire de tête :

101×99

1001×999

10001×9999

EXERCICE 4.17 -(CORRIGÉ)

Le stade COMPLETUDE peut contenir 15000 places. Il y a x places en virage, les autres en tribune. Les places en virage coûtent 10 €, les places en tribune coûtent 13 €. Aujourd'hui le stade est plein.

a) Que représentent ces trois expressions ?

$10x$

$15000 - x$

$(15000 - x) \times 13$

b) Ecrire en fonction de x le montant total de la recette

c) Calculer la recette si $x = 6500$

EXERCICE 4.18 -

Au théâtre, la place coûte x €. En achetant une carte d'abonnement coûtant 15 €, on bénéficie d'une réduction de 2 € par spectacle. Ecrire en fonction de x, la dépense totale pour un abonné qui a vu 10 spectacles.

Chapitre V : EQUATIONS ET RESOLUTIONS DE PROBLEMES

EXERCICE 5.1 - Résoudre (trouver x tel que) :

a) $x - 4 = 12$	b) $x - 5 = 7$
c) $7 \times x = 13$	d) $6 \times x = 8$
e) $(-2) \times x = 15$	f) $(-5) \times x = 20$
g) $2{,}7x = -8{,}1$	h) $(-2{,}5)x = -0{,}8$

EXERCICE 5.2 - Résoudre :

a) $3(x-2) = 2(x+7)$	b) $5(2x+3) = x - 4$
c) $6x - 3 = 3(x-5)$	d) $x + 2 = 3x - 1$

e) $2(x+1) - 3(3x-4) = 7x + 9$

EXERCICE 5.3 - Résoudre :

$2x = \frac{7}{2}$	$-\frac{5}{6}x = 15$
$\frac{2}{5}x = \frac{-1}{7}$	$-\frac{2}{3}x = -\frac{23}{9}$
$\frac{6}{7}x = -\frac{12}{35}$	$-\frac{-2}{13}x = 0{,}5$

EXERCICE 5.4 - Résoudre :

a) $-x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

b) $7(x+7) - 4(x-44) = 77$

c) $\frac{3x}{12}=\frac{1}{3}$

d) $\frac{x}{9}=\frac{5}{2}$

e) $\frac{5}{x}=-\frac{9}{12}$

f) $\frac{2}{5}=\frac{3}{x}$

g) $0x=2$

h) $0x=0$

EXERCICE 5.5 (CORRIGÉ) - Résoudre :

a) $\frac{4(2x-3)}{3}=4-\frac{3(x-3)}{5}$

b) $\frac{2(x+7)}{5}-\frac{x-9}{3}+3=\frac{3x+16}{15}$

c) $\frac{3(4x-5)}{5}+1=\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+4}{5}$

EXERCICE 5.6 - Résoudre :

a) $5x+3=19x+\frac{1}{2}$

b) $8x-4=4x+1$

c) $3(2x+1)=8x-7$

d) $\frac{2}{3}x-\frac{3}{7}=\frac{1}{12}x-1$

e) $23-7x=42x-107$

f) $\frac{2}{3}(x-1)-11(x+3)=\frac{4}{3}(1-3x)$

g) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{3}=\frac{x-5}{6}$

EXERCICE 5.7 - Un réservoir contient 150 litres, ce qui représente les 5/8 de sa capacité totale. Quelle est sa capacité totale ?

EXERCICE 5.8 - Claudine a dépensé 56 €, soit 4/9 de sa fortune. A combien s'élevait le montant de son portefeuille ?

EXERCICE 5.9 - Romain achète des fleurs à 2,50 € l'unité. Hervé achète 12 fleurs de plus que Romain. Les fleurs d'Hervé coûtent 0,50 € l'unité. Romain et Hervé payent la même somme.

a) Calculer en fonction de x (le nombre de fleurs achetées par Romain) : la dépense de Romain, le nombre de fleurs achetées par Hervé, la dépense de Hervé.

b) Trouver le nombre de fleurs achetées par Romain

EXERCICE 5.10 - Traduire en mathématique, les énoncés suivants :

« Oter un tiers aux trois quarts d'un nombre ».

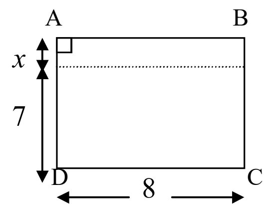
« Prendre le tiers des trois quarts d'un nombre ».

EXERCICE 5.11 - Virginie dépense les 2/5 de sa tirelire pour acheter un CD et le tiers du reste pour acheter deux CD-2-titres à 4,5 €. Combien avait-elle d'argent dans sa tirelire et combien lui reste-t-il ?

EXERCICE 5.12 - Morgane a deux fois plus de livres que Roch, et Bruno, trois fois plus que Roch. A eux trois ils totalisent 114 livres. Combien chacun possède de livres ?

EXERCICE 5.13 - Dans une recette de cocktail de jus de fruits pour quatre personnes il y a 1/4 de jus d'ananas, $1/8$ de jus de citron, 1/3 de jus d'orange, 1/6 de jus de pamplemousse et 12cL de sirop de grenadine. Quelle est la contenance de chaque verre ?

EXERCICE 5.14 -



a) Ecrire l'aire du rectangle ABCD en fonction de x.

b) Quelle doit être la valeur de x pour que la surface de ABCD soit égale à 72 m².

EXERCICE 5.15 - Lors d'un entraînement au triathlon, Romain parcourt $1/4$ du trajet en courant, les 2/3 à vélo et le reste soit 2 km à la nage. Sur quelle distance Romain a-t-il couru et fait du vélo ?

EXERCICE 5.16 - A la fin de la journée, la caissière du musée comptabilise une recette de 746 €. Combien de billets plein tarif à 3 € a-t-elle vendu sachant qu'elle a vendu 196 billets tarif réduit à 2 euros ?

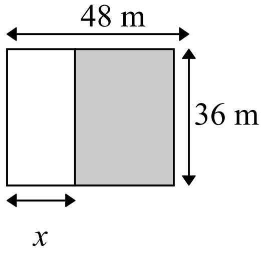
EXERCICE 5.17 – (CORRIGÉ) -
Trouver si possible trois entiers consécutifs tels que le produit du premier et du troisième soit égal au carré du deuxième.

EXERCICE 5.18 – Lorsque Papy traite les rosiers, il met 10 heures. Papa lui, ne met que 6 heures. Ce week-end, pour gagner du temps, ils décident de travailler simultanément sans se gêner. Au bout de combien de temps, exprimé en heures et en minutes, auront-ils fini ?

EXERCICE 5.19 – Cette année Gwenaëlle a grandi de 1/8 de sa taille, elle mesure maintenant 1,8 m. Combien mesurait-elle en début d'année ?

EXERCICE 5.20 - Au décollage de Roissy, les trois quarts des sièges de l'avion sont occupés. Après l'escale de Hong-Kong, il y a 22 passagers en plus et l'appareil est alors rempli aux cinq sixièmes. Combien y a-t-il de places dans l'avion ?

EXERCICE 5.21 -



Quelle doit être la valeur de x pour que l'aire grise soit le double de l'aire blanche ?

Chapitre VI : ORDRE ET OPERATIONS

EXERCICE 6.1 - On donne $x < 19$; déduisez-en en utilisant les propriétés du cours, que l'on a :

a) $x + 21 < 40$	b) $x - 30 < -11$
c) $x - 19 < 0$	d) $3x < 57$
e) $8x < 152$	f) $x - 15,4 < 3,6$

EXERCICE 6.2 - Donner une valeur décimale de x qui vérifie les conditions suivantes :

a) $x \geq -6,2$ et $x \leq 4,3$
b) $x \leq -7$ et $x \geq -2$
c) $x \leq -3,5$ et $x \leq 2,5$

EXERCICE 6.3 -
Représenter sur une règle graduée tous les nombres qui vérifient les deux conditions :

a) $x < 4$ et $x \geq 1$
b) $x \leq -4$ et $x < 5$
c) $x > 4$ et $x \geq 2$
d) $x \geq -5$ et $x < -1$

EXERCICE 6.4 -
Effectuer la différence des nombres donnés puis les comparer :

a) 5a-2 et 4a+1
b) 3(a+4) et 15+3a
c) a^2-2a+8 et -2a+5

EXERCICE 6.5 -
Soit y un nombre relatif.
a) On sait que : y - 5 < 1. Que dire alors de y ?
b) On sait que : y + 2 > 4. Que dire alors de y ?
c) Dessiner une règle graduée et colorer la zone des valeurs de y qui vérifient les deux conditions précédentes.

EXERCICE 6.6 -
Soit y un nombre relatif.
a) On sait que : $\frac{1}{3}y > -2$. Que dire alors de y ?
b) On sait que : -2 y > 8. Que dire alors de y ?
c) Dessiner une règle graduée et colorer la zone des valeurs de y qui vérifient les deux conditions précédentes.

EXERCICE 6.7 (CORRIGÉ) -

Dans chaque cas donner un encadrement de x :

a) $-9 < 3x < 9,9$
b) $1,2 < \frac{4}{3}x < 6,5$

EXERCICE 6.8 -
On note P le périmètre en cm et A l'aire en cm² d'un rectangle. L'une des deux dimensions du rectangle est de 4 cm.
a) Son autre dimension, tronquée au dixième est de 2,3 cm. Donner un encadrement de P et de A.
b) Donner un encadrement de P lorsque
30 < A < 40.
c) Donner un encadrement de A lorsque 30 < P < 40.

EXERCICE 6.9 -
L'unité de longueur est le m. E, F et G sont trois points tels que :
3,5 < EF < 4

4 < FG < 4,2
3,9 < GE < 4,5
a) Le triangle EFG peut-il être isocèle ?
b) Le triangle EFG peut-il être équilatéral ?

EXERCICE 6.10 -
Au magasin « Aux bons disques », les DVD coûtant entre 15 € et 25 € sont vendus avec une réduction de 15%.
a) Donner un encadrement du prix après réduction des DVD.
b) Arthur possède 50 €. Peut-il espérer acheter 4 DVD ?

EXERCICE 6.11 (CORRIGÉ) -
Démontrer que quels que soient les nombres a, b, c et d, si a < b et c < d alors a + c < b + d.

Chapitre VII : UTILISATION DE LA PROPORTIONNALITE

EXERCICE 7.1 - Corriger l'erreur dans le tableau pour qu'il soit un tableau de proportionnalité.

18	- 6	12	$\frac{3}{5}$
6	- 2	3	$\frac{1}{5}$

Quel est le coefficient de proportionnalité ?

EXERCICE 7.2 - Les nombres 57 et 372 sont proportionnels aux nombres 41,04 et x. Trouver x.

EXERCICE 7.3 (CORRIGÉ) -
La consommation de gazole (en litres) d'un tracteur est proportionnelle à la durée d'utilisation (en min). Le tracteur consomme 17 litres pour une durée de 30 mn.
1) Calculer la consommation pour 1h30 mn d'utilisation.
2) Calculer la durée d'utilisation pour une consommation de 25,5 litres.
3) Représenter graphiquement cette situation de proportionnalité.

EXERCICE 7.4 - Gaston et Gustave reçoivent chaque mois la somme de 17 €. Le père de Gaston lui propose une augmentation de 12%. Tandis que la mère de Gustave lui offre une augmentation de 2,5 €. Quel est celui qui a les parents les plus généreux ?

EXERCICE 7.5 - Un avion a pour longueur 16,54 m et 10,36 m d'envergure. Quelles sont les dimensions de sa maquette à l'échelle 1/75 ?

EXERCICE 7.6 – L'indice du coût de la construction sert à limiter les augmentations du prix des loyers : les loyers ne peuvent pas augmenter plus vite que lui. Cet indice valait 100 lors de sa création au 4^{e} trimestre 1953, 1276 au 2nd trimestre 2005 et 1366 au 2nd trimestre 2006. On suppose que le loyer d'un logement est de 700€ au 2nd trimestre 2005 et qu'il correspond à cet indice.
a) Calculer le loyer au 2nd trimestre 2006. Arrondir à l'euro.
b) Calculer le loyer en anciens francs au 4^{e} trimestre 1953, sachant que 1 € vaut 6,55957 francs. Arrondir au millier d'anciens francs.

EXERCICE 7.7 - La vitesse d'un cycliste est de 18 km/h. Quelle distance parcourt-il en 1/4 d'heure, en 1/2 heure, en 1h36 mn ?

EXERCICE 7.8 - 2 m^3 de fer pèsent 15 600 kg. M. Fortich se demande alors :
a) Quelle est la masse de 4 m^3 de fer, de 7 m^3 ?
b) Quel volume de fer puis-je soulever sachant que je peux porter 100 kg ? Faire un tableau.

EXERCICE 7.9 - Le prix d'un article baisse de 30% puis deux mois plus tard augmente de 15%. Cela revient-il à une baisse de 15% ?

EXERCICE 7.10 - Le 15 septembre, un jeu électronique est vendu 55 €. En décembre, son prix augmente de 20%. Au 15 février, le jeu est soldé de 20%. Son prix est-il alors revenu à 55 € ?

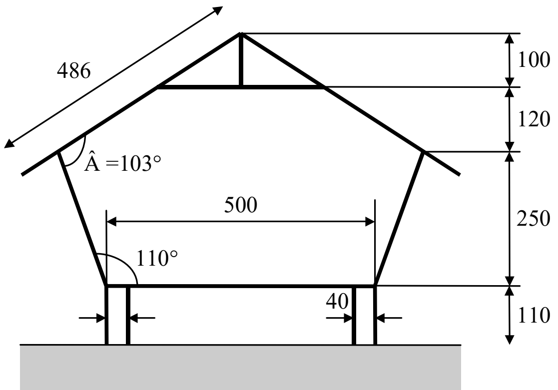
EXERCICE 7.11 - Un cycliste se rend de St Complétude à Cap Math, villes distantes de 24 km. 1/4 du trajet est en montée et 1/3 en descente. Sa vitesse en descente est de 16 km/h et de 5 km/h en montée. Sachant qu'il roule pendant 1h12 mn à plat, calculer sa vitesse moyenne.

EXERCICE 7.12 - J'ai vendu 368,90 € une marchandise que j'avais payée 340 € :
a) Quel pourcentage du prix d'achat mon bénéfice représente-t-il ?
b) Quel pourcentage du prix de vente mon bénéfice représente-t-il ?

EXERCICE 7.13 - Quelle quantité de cuivre doit-on ajouter à 800 g d'argent pour obtenir un alliage contenant 60% de son poids en argent ?

EXERCICE 7.14 (CORRIGÉ) -
Un alligator sort de l'eau et fonce vers une proie distante de 60 m à la vitesse de 20 km/h. Ensuite il revient dans l'eau par le même chemin à la vitesse de 12 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur la totalité de son déplacement ?

EXERCICE 7.15 – Voici le plan d'une maison proposé par un architecte :



a) Dans quelle unité sont données les mesures réelles sur le plan ?
b) Déterminer l'échelle.
c) Refaire un plan en multipliant les dimensions par 2. Combien mesure l'angle Â dans le nouveau plan ?
d) Déterminer la nouvelle échelle.
e) En déduire combien de mètres représente 3 cm ?

Chapitre VIII : TRAITEMENT DE DONNEES

EXERCICE 8.1 - Dans un établissement de 100 élèves, 14 élèves apprennent le russe, 78 apprennent le japonais, aucun élève n'apprend à la fois ces deux langues.
Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 8.2 - On fait une étude concernant la façon dont les élèves viennent à l'école. Sur 140 élèves :

- 65 élèves viennent en autobus
- 30 élèves viennent en métro
- 10 sont accompagnés en voiture
- 19 viennent à vélo
- 10 viennent à pied
- 6 viennent en patin à roulettes

Représenter ces résultats dans un tableau.
Calculer le pourcentage d'élèves utilisant chaque moyen de transport.
Représenter ces résultats sur un diagramme circulaire.

EXERCICE 8.3 - Les touristes étrangers dans un camping se répartissent de la façon suivante :

Nationalités	D	E	GB	I	NL
Nombre de touristes			6	18	
Pourcentage (%)	30	10	5		40

a) Reproduire et compléter le tableau.
b) Tracer un diagramme en bâtons des données de ce tableau.

EXERCICE 8.4 - On étudie les parts de marché de chaque constructeur automobile. Sur un diagramme circulaire, leurs secteurs respectifs sont de :

Ford : 50°	PSA : 83°
Volkswagen : 86°	Renault : 141°

a) Exprimer ces parts de marché sous forme de pourcentages.
b) Sachant que le marché total est de 1 296 milliers de véhicules, exprimer la part de chaque constructeur en nombre de milliers de véhicules.

EXERCICE 8.5 - Voici les performances des garçons de 4^{e} au 60 m :
9,6 - 9,8 - 10,4 - 9,2 - 9,5 - 8,4 - 11,1 - 8,6 - 9,7 - 10 - 9,9 - 9,2 - 9 - 8,8 - 10,1 - 11 - 8,4 (secondes).
a) Présenter ces temps sous forme d'un tableau (les regrouper en classes de 3 dixièmes) où figureront les effectifs cumulés.
b) Représenter les performances par un histogramme.
c) Calculer le temps moyen.

EXERCICE 8.6 - Un groupe de 505 personnes est composé de 280 hommes et de 225 femmes.
a) On constate que 25 % des hommes fument et que 20 % des femmes fument.
b) Quel est le nombre d'hommes qui fument, le nombre de femmes qui fument ?

c) Quel est le pourcentage de fumeurs dans ce groupe ?

EXERCICE 8.7 -
En utilisant une calculatrice, calculer la moyenne des quantités d'essence en litres, vendues dans une station d'essence en 1h :
14,5 ; 45,6 ; 26 ; 48,7 ; 17,8 ; 56,4 ; 23,4 ; 46,9 ; 18,7 ; 29,7 ; 33,4 ; 47,6 ; 45,6 ; 17,2 ; 46,5 ; 16,2.

EXERCICE 8.8 (CORRIGE) -
A un concours administratif, les coefficients sont les suivants :
Maths : 5 / Histoire : 3 / Anglais : 2.
Kévin a eu 12 en maths, 8 en histoire et 9 en anglais.
Pour réussir au concours, il faut une moyenne au moins égale à 10. Est-ce que Kévin a réussi son concours ?

EXERCICE 8.9 -
Une grande école d'ingénieur du BTP possède quatre spécialités. Lors des élections pour désigner le représentant des élèves des 4 spécialités, plusieurs candidats se sont présentés. Monsieur DURAND, candidat le mieux placé, a obtenu les pourcentages suivants :
Bâtiment : 75% des 350 votants
Travaux publics : 42 % des 1200 votants
Electrotechnique : 62 % des 520 votants
Ingénierie internationale : 48 % des 450 votants.
Pour être élu au premier tour, le pourcentage obtenu doit être supérieur à 50%. Monsieur DURAND sera-t-il élu au premier tour ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 8.10 -
Avant le dernier devoir trimestriel, Damien a obtenu en mathématiques les notes suivantes qui sont affectées d'un coefficient 1 : 9 – 14 – 15 – 10
a) Calculer la moyenne de Damien avant le dernier devoir.
b) Dans cette question, on considère que le dernier devoir sera affecté d'un coefficient 1. Calculer la moyenne de Damien s'il a 9,5 à ce devoir. Quelle devrait être la note de Damien pour que sa moyenne soit égale à 13 ? Donner un encadrement de la moyenne de Damien ce trimestre.
c) Finalement, le dernier devoir a été affecté d'un coefficient 2. Reprendre les questions précédentes dans ce nouveau cas de figure.

Chapitre IX : THEOREME DE PYTHAGORE

EXERCICE 9.1 - Soit ABCD un rectangle tel que AB = 7 cm et AD = 6 cm. Soit I le point de [AD] tel que AI = 2 cm et M le point de [AB] tel que AM = 3 cm. Le triangle IMC est-il rectangle ?

EXERCICE 9.2 - Soit un trapèze rectangle ABCD de bases [AB] et [CD], tel que (AD) soit perpendiculaire à (DC).
a) AB = 9 cm, BC = 10 cm et AD = 4 cm. Soit H le projeté orthogonal de B sur (DC). Calculer la surface du trapèze.
b) Soit M le point de [AB] tel que AM = 3 cm. Le triangle DMH est-il rectangle ?

EXERCICE 9.3 - Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 7cm et un côté 5cm. Calculer la longueur du 3^e côté et vérifier sur le dessin.

EXERCICE 9.4 - ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A. AB = 8 cm et
AC = 15 cm. Calculer l'aire d'ABC. Calculer BC et en déduire AH. Calculer BH.

EXERCICE 9.5 – ABCD est un rectangle tel que : AB = 4 cm et BC = 3 cm. M est un point de [AB] tel que AM = 1 cm. N est un point de [BC] tel que BN = 1 cm. Faire une figure.
a) Démontrer que les droites (MD) et (MN) sont perpendiculaires
b) La droite perpendiculaire à (DN) et passant par M coupe [DN] en H. Calculer MH.

EXERCICE 9.6 (CORRIGE) -
Dessiner le triangle RFG tel que :
RF=1/3 dm, FG = 1/4 dm et RG = 5/12 dm.
RFG est-il rectangle ?

EXERCICE 9.7 -
Un rectangle a une aire de 29,52 cm² et un côté de 8 cm de long. Calculer la longueur des diagonales.

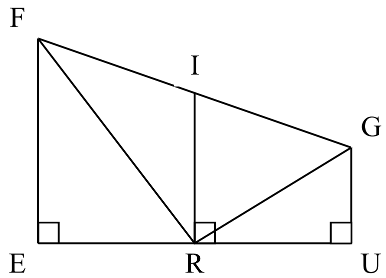
EXERCICE 9.8 -
Construire un rectangle ABCD tel que AB = 7cm et AD = 4cm.
Calculer la longueur de sa diagonale [BD] arrondie au millimètre.

EXERCICE 9.9 -
Construire un triangle MNP tel que : MN = 6cm, NP = 6,5 cm et MP = 2,5 cm. Avec l'équerre, ce triangle semble-t-il rectangle ?
Démontrer que ce triangle est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore.

EXERCICE 9.10 -
MNPQ est un rectangle tel que :
MN = 8 cm et NP = 5 cm.
R est le point du côté [MN] tel que MR = 2 cm.
S est le milieu du côté [MQ].
Faire une figure.
Le triangle PRS est-il rectangle ?

EXERCICE 9.11 -
ABC est un triangle tel que AB= 4,5 cm ;
AC = 6cm et BC = 7,5 cm.
D est le point de la demi-droite [BA) tel que
BD = 7 cm.
1) Faire une figure.
2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3) Calculer la longueur DC.
4) Le triangle BCD est-il rectangle ? Justifier la réponse.
5) Calculer l'aire du triangle BCD.
6) Dans le triangle BCD, I est le pied de la hauteur issue de D. Placer I.
7) Calculer la longueur DI.
8) Les droites (AC) et (DI) se coupent en J. Démontrer que (BJ) et (CD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 9.12 -
FG = 10 m
GU = 2 m
IR = 5 m
RU = 4 m

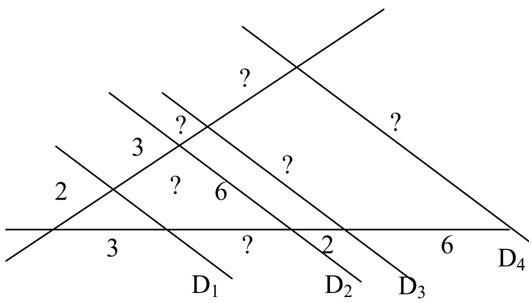


a) R est le milieu de [EU]. Montrer que I est le milieu de [FG].
b) Montrer que FRG est un triangle rectangle.
c) Calculer la longueur de EF.

Chapitre X : MILIEUX ET DROITES PARALLELES D'UN TRIANGLE

EXERCICE 10.1 - ABC un triangle quelconque. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC]. Montrer que ABC et IJK ont les mêmes médianes.

EXERCICE 10.2 - D_1, D_2, D_3, D_4 sont parallèles. Calculez les longueurs marquées d'un « ? ».

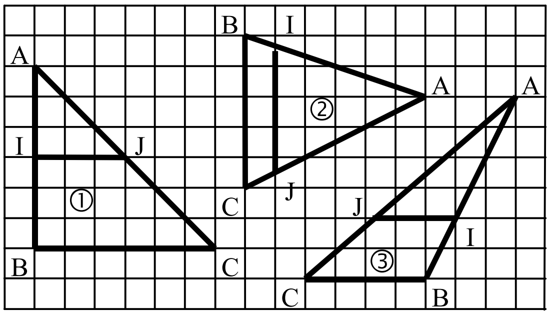


EXERCICE 10.3 - On considère le triangle ABC tel que AB = 8cm, AC = 7cm et BC = 9cm. Soit M un point du segment [AB] tel que AM = 2cm.
Par M, on trace la parallèle à la droite (BC). Elle coupe le segment [AC] en N. Calculer le périmètre du triangle AMN.

EXERCICE 10.4 (CORRIGÉ) - ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AB = 4 cm et AC = 3 cm.
D est le point de la demi-droite [BA) tel que BD = 6 cm. La parallèle à (AC) qui passe par D coupe (BC) en E.
a) Calculer BC.
b) Calculer BE.

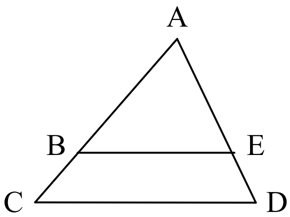
EXERCICE 10.5 - Etant donnés un triangle PRE et O le milieu de [PR], tracer la parallèle à (RE) passant par O et coupant [PE] en U. Tracer de même la parallèle à (PR) passant par U et qui coupe [RE] en I.
Que dire des points U et I ?
Donner la nature du quadrilatère OUIR ainsi que son périmètre lorsque RE = 5,6cm et PR = 3,8cm.

EXERCICE 10.6 -



Compléter les égalités suivantes :
$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{?}{?}$

EXERCICE 10.7 - Dans le triangle représenté, (BE) est parallèle à (CD), B est un point de [AC] et E un point de [AD].



Compléter les égalités suivantes : $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{?} = \frac{BE}{?}$
Puis, pour chacun des cas suivants, calculer les deux longueurs manquantes :
a) AB = 1,6 cm, AC = 5,6 cm ; BE = 2,2 cm et AD = 7 cm. Calculer AE et CD.
b) AE = 2,8 cm, ED = 6,3 cm, CD = 2,7 cm et AB = 1,2 cm. Calculer BE et BC.
c) AB = 5,4 cm, AE = 2,4 cm, BC = 3,6 cm et CD = 6,5 cm. Calculer ED et BE.

EXERCICE 10.8 - a) Construire un triangle RST tel que RS = 5 cm, ST = 8 cm, et TR = 6 cm. On place sur le segment [RS] un point P tel que RP = 2 cm. La parallèle à (ST) passant par P coupe [RT] en Q.
b) Grâce aux égalités de Thalès, calculer les longueurs RQ et PQ. (Ne pas oublier de vérifier en mesurant !).

EXERCICE 10.9 - On considère un quadrilatère ABCD quelconque. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en un point O.
La parallèle à la droite (AB) passant par O coupe la droite (BC) en M.
La parallèle à la droite (AD) passant par O coupe la droite (CD) en N.
Comparer les rapports $\frac{CM}{CB}$, $\frac{CO}{CA}$ et $\frac{CN}{CD}$.

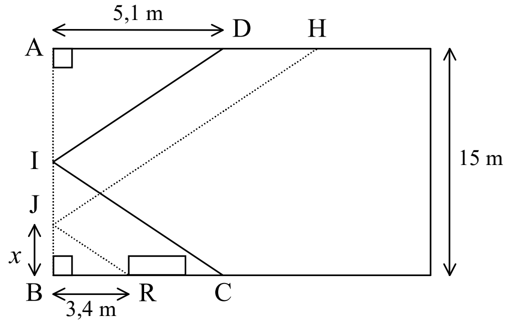
EXERCICE 10.10 - Tracer un parallélogramme ABCD tel que (BD) soit perpendiculaire à (AC).
Soient O le point de concours de (AC) et (BD) et I le milieu de [AB].
La parallèle à (BD) passant par I coupe (AD) en J et la parallèle à (AC) passant par I coupe (BC) en K.
Montrer que J est le milieu de [AD].
Montrer que les points J, O et K sont alignés.
Montrer que JIOD est un parallélogramme.

EXERCICE 10.11 - PQRS est un trapèze de bases [PQ] et [RS]. T est le symétrique de S par rapport à P et U celui de Q par rapport à R. (TU) coupe (PQ) en A et (RS) en B.
Montrer que A est le milieu de [TB] et B celui de [AU].
En déduire que TA = AB = BU.

EXERCICE 10.12 - Soit un triangle RAT, U le milieu de [RT] et O le milieu de [RU]. On nomme I le symétrique de A par rapport à O.
Démontrer que RAUI est un parallélogramme.
Que peut-on dire des droites (IR) et (UA) ?
La droite (AU) coupe [IT] en F. Démontrer que F est le milieu de [IT].

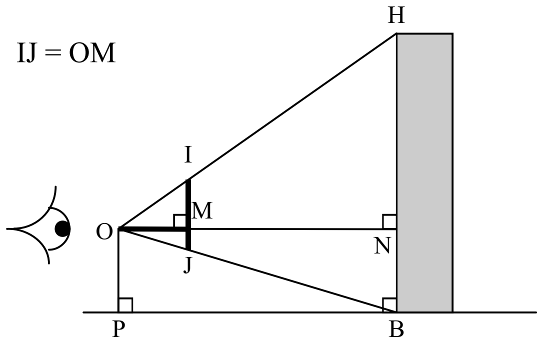
EXERCICE 10.13 - Soit un triangle BCG tel que BC = 8 cm. O est un point de [BC] tel que BO = 5 cm. Et la parallèle à (CG) passant par O coupe [BG] en F. On nomme p et p' les périmètres respectifs des triangles BCG et BOF.
Exprimer OF en fonction de GC, BF en fonction de BG, puis p' en fonction de p. En déduire la valeur de $\frac{p'}{p}$.

EXERCICE 10.14 (CORRIGÉ) - On veut arroser une cour fermée par trois murs grâce à un jet diffuseur. Placé au milieu du côté [AB], il arrose symétriquement le jardin. A quelle distance x de B faudrait-il le placer pour qu'il arrose le massif de roses situé en R ? Atteindra t-il le tout jeune orme planté à 7 m de A sur le côté [AH) ?



EXERCICE 10.15 - Soit un triangle PDG, et A un point extérieur à ce triangle. La translation qui transforme D en A transforme aussi P en P' et G en G'.
[PA] et [DP'] se coupent en B et [GA] et [DG'] se coupent en C.
Montrer que PG = 2 BC.

EXERCICE 10.16 - Pour mesurer la hauteur de hauts monuments ou plus simplement un arbre, il existe un instrument très simple à utiliser : le té de géomètre. En voici le fonctionnement :



Montrer que BP est aussi la hauteur de l'objet que l'on mesure.

Chapitre XI : Triangle rectangle, cercle et bissectrices

EXERCICE 11.1 -
Tracer un cercle Q de diamètre 4,5 cm et de centre M. Placer trois points A, B et C sur ce cercle. Tracer les tangentes au cercle Q en ces trois points.

EXERCICE 11.2 -
Tracer un triangle ABC tel que l'angle $\widehat{ABC} = 30°$, BC = 7 cm et l'angle $\widehat{ACB} = 20°$.
Tracer le triangle BCM dont A est le centre du cercle inscrit.

EXERCICE 11.3 -
Tracer un triangle ADM tel que : AM = 6 cm, AD = 3,6 cm et DM = 4,8 cm. Placer le milieu C de [AM] et le milieu F de [CM]. Le cercle de diamètre [CM] coupe [DM] en E.
Quelle est la nature des triangles ADM et CEM ?
a) Déterminer CD et FE.
b) Démontrer que : angle $\widehat{ECM}$ = angle $\widehat{DAM}$ = angle $\widehat{ADC}$.
c) Démontrer que (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DCM}$.
d) Calculer l'aire du triangle ADM.
e) Expliquer pourquoi les triangles ADC et DCM ont la même aire.
f) Déterminer l'aire du triangle DCM.
g) Calculer CE, EM puis la distance de E à (MC).

EXERCICE 11.4 -
Tracer un triangle CAQ tel que CQ = 13 cm, CA = 5 cm et AQ = 12 cm.
Placer I milieu de [CQ]. Démontrer que le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle CAQ.

EXERCICE 11.5 (CORRIGE) -
AXQ est un triangle tel que l'angle $\widehat{AXQ} = 40°$ et l'angle $\widehat{XAQ} = 60°$. Les bissectrices de ces deux angles se coupent en I. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{XIQ}$.

EXERCICE 11.6 -
PDG est un triangle rectangle en P. Son cercle circonscrit a pour rayon 3 cm.
Faire une figure sachant de plus que PD = 4,8 cm.
Calculer DG puis PG.

EXERCICE 11.7 -
Avec une règle graduée et le compas, construire un triangle STU rectangle en T tel que SU = 8,5 cm et ST = 4 cm. H est le pied de la hauteur issue de T. Quels sont le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle UTH ?

EXERCICE 11.8 -
Construire un cercle Q de centre A et de rayon 4cm. Placer un point B tel que AB = 6 cm. On note C un point du cercle Q tel que l'aire du triangle ABC est égale à 9 cm².
Calculer la distance de C à la droite (AB).
Construire tous les points C possibles.

EXERCICE 11.9 -
1. Tracer un cercle Q de centre O et de diamètre [AB]. Placer un point M sur le cercle Q tel que l'angle $\widehat{BOM} = 55°$.
2. Avec la règle et le compas, construire la tangente à Q en M. Elle coupe la droite (AB) en C.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OCM}$.

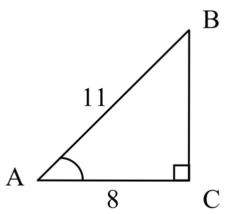
EXERCICE 11.10 -
Q est un cercle de centre O et de diamètre [AC]. I est un point de Q. J est un point de Q tel que les droites (OJ) et (CI) sont parallèles. (t) est la tangente à Q en J. Démontrer que les droites (AI) et (t) sont parallèles.

EXERCICE 11.11 -
1) Tracer un segment [AB] tel que AB = 6cm. On note M le milieu du segment [AB] et (d) la médiatrice de ce segment. Q est le cercle de centre B et de rayon 3 cm. Que représente la droite (d) pour le cercle Q ?
2) I est un point du cercle Q tel que MI = 3 cm. Expliquer pourquoi la droite (AI) est une tangente au cercle Q. Calculer la longueur AI en cm, arrondie au dixième.
3) Le cercle Q' de centre I et de rayon 3 cm coupe la droite (d) en M et en un point K. Démontrer que le segment [BK] est un diamètre du cercle Q'. Quelle est la nature du triangle ABK ?
4) La tangente en B au cercle Q' coupe la droite (AK) en H. Démontrer que A est le milieu du segment [HK]. Calculer BH en cm, arrondi au dixième.

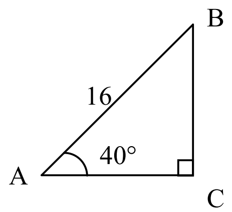
Chapitre XII : TRIANGLE RECTANGLE ET COSINUS D'UN ANGLE

EXERCICE 12.1 (CORRIGÉ) -
Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 m et AC = 4 m.
a) Calculer BC à l'aide du théorème de Pythagore.
b) Calculer cos($\widehat{ABC}$) et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{B}$ au degré près, puis celle de l'angle $\widehat{C}$.
c) Vérifier la mesure de $\widehat{C}$ en calculant cos($\widehat{ACB}$) puis l'angle.

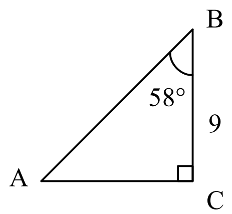
EXERCICE 12.2 -
Calculer la mesure de $\widehat{A}$ et BC.



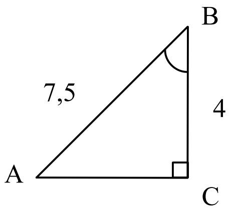
EXERCICE 12.3 – Calculer AC et BC.



EXERCICE 12.4 - Calculer AB et AC.



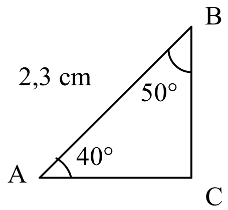
EXERCICE 12.5 -
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ et ensuite la longueur AC.



EXERCICE 12.6 -
Soit un triangle SIO isocèle en I et de base SO = 5 cm. L'angle $\widehat{SIO}$ mesure 40°.
Calculer l'aire et le périmètre de ce triangle isocèle. Préciser si les valeurs sont exactes ou approchées.

EXERCICE 12.7 -
1. Donner un arrondi à 0,0001 près de :
a) Cos 25°
b) Cos 36°
c) Cos 47°
2. Donner une troncature à 0,001 près des angles $\hat{B}$ lorsque :
a) Cos $\hat{B} = 0,12$
b) Cos $\hat{B} = 0,75$
c) Cos $\hat{B} = 0,36$

EXERCICE 12.8 - Calculer les distances BC et AC.



EXERCICE 12.9 –.
Une échelle est appuyée sur un mur et son extrémité supérieure dépasse de 0,615 m du haut du mur. L'échelle est composée de 25 échelons, distants de 0,22 m d'axe en axe. Le premier et le dernier sont à 0,175 m de chaque extrémité. Le pied de l'échelle est à 1,10 m du pied du mur.
a) Quel est l'arrondi au degré de l'angle que fait l'échelle avec le mur ?
b) Quel est l'arrondi en cm de la hauteur du mur ?

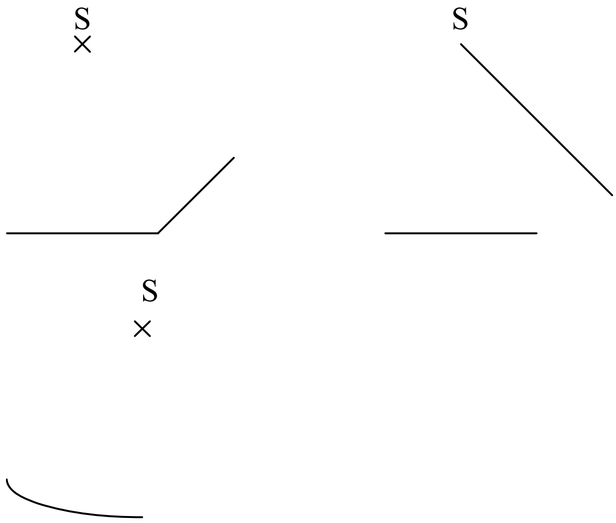
EXERCICE 12.10 –
Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que AB=5cm et AC=7 cm. Calculer la troncature à 0,1 cm près de BC et à 0,1° près de la mesure des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Contrôler la vraisemblance des résultats à l'aide du dessin.

<u>Chapitre XIII :</u> CONFIGURATIONS DANS L'ESPACE : PYRAMIDES ET CONES DE REVOLUTION

EXERCICE 13.1 - Faire le patron d'un cône de rayon à la base 2 cm et de génératrice 5 cm.
Y a-t-il plusieurs possibilités ?

EXERCICE 13.2 - Faire le patron d'une pyramide de base un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 2 cm et de génératrice 5 cm.
Y a-t-il plusieurs possibilités ?

EXERCICE 13.3 - Compléter les figures pour obtenir la représentation en perspective d'un tétraèdre, d'une pyramide à base carrée et d'un cône.



EXERCICE 13.4 - Faire le patron d'une pyramide ayant pour base un carré inscrit dans un cercle de diamètre 6 cm et de hauteur 4 cm. (Faire un dessin).

EXERCICE 13.5 - Reprendre l'exercice précédent avec un hexagone à la base.

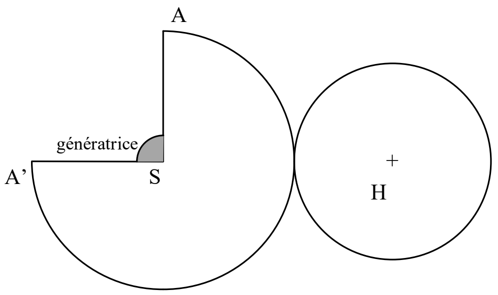
EXERCICE 13.6 (CORRIGÉ) - Soit une pyramide SABCD de base un rectangle de centre H. SH est la hauteur de la pyramide. On donne :
AB = 5 cm ; AC = 6 cm ; SH = 3 cm.
a) Construire en vraie grandeur le rectangle ABCD et le triangle ACS, puis ABS et BCS.
b) Calculer l'aire latérale de la pyramide.
c) Calculer le volume de la pyramide.

EXERCICE 13.7 - Une pyramide SABC a pour sommet S et pour hauteur SA.
AB = 4 cm ; BC = 3 cm ; AC = 5 cm ; SB = 7 cm.
a) Construire le patron de cette pyramide en prenant comme unité le cm.
b) Calculer le volume de cette pyramide.

EXERCICE 13.8 - Compléter le tableau de volumes de cône suivant :

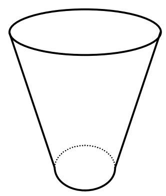
Hauteur	Rayon	Aire de la base	Volume
7 cm	3 cm		
5 dm	33 cm		
	5 m		$75\ \pi\ m^3$
3 m		$4\ \pi\ dam^2$	
6 mm			$24\ \pi\ mm^3$

EXERCICE 13.9 - On donne le patron du cône de sommet S et de rayon HA. Compléter le tableau donné ci-après.



SA	Angle A'SA	Périmètre de la base	HA
5 cm	200°		
	100°	40 cm	
	150°		3 cm
10 cm			5 cm

EXERCICE 13.10 - Lors d'une soirée, Elisabeth verse la fin de la bouteille de limonade dans son verre. Son amie Catherine lui en réclame alors la moitié. Elisabeth lui remplit son verre jusqu'à la moitié. Malgré cela Catherine hurle à l'injustice. A-t-elle raison ?



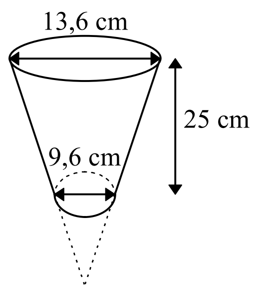
Modèle du verre

EXERCICE 13.11 - Un fabricant de chapeau conique (spécialité du Vietnam) voudrait les envoyer dans des boîtes cylindriques. Leur hauteur est 25 cm et leur diamètre 80 cm.
a) Quelles doivent être les dimensions de la boîte ?
b) Pour ne pas qu'ils s'abîment lors du voyage, il remplit les chapeaux de papier journal et complète la boîte avec des copeaux de bois. Quel volume de copeaux doit il verser dans chaque paquet ?
c) Il achète 1 m^3 de copeaux, combien pourra t-il faire de paquets ?

EXERCICE 13.12 - Notre fabricant de chapeau doit maintenant se réapprovisionner en feuilles de bambou pour les couvrir. Une feuille a une surface de 25 cm². Combien doit-il en acheter sachant qu'il faut en mettre 3 couches pour faire un beau chapeau ?

EXERCICE 13.13 - Soit un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et I un point de [AD] tel que AI = 1 cm. On a :
EF = 3,4 cm ; EH = 4,8 cm ; AE = 4,2 cm
a) Tracer le parallélépipède puis la pyramide EADCM de hauteur EA.
b) Calculer EM, MC, EG, EC et ED.
c) Faire le patron de la pyramide.
d) Calculer son volume.

EXERCICE 13.14 - Calculer le volume d'un verre maxi-taille qui est en fait un tronc de cône dont les mesures sont :



.

Partie C : CORRIGES

Chapitre I

EXERCICE 1.4 – Sachant que $a = -4$ et $b = 5$:

$a + b = -4 + 5 = 1$

$b - a = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9$

$2a - 3b = 2(-4) - 3 \times 5 = -8 - 15 = -23$

$-5a + 2b = -5(-4) + 2 \times 5 = +20 + 10 = 30$

$2ab = 2(-4) \times 5 = -2 \times 4 \times 5 = -40$

$-ab = -(-4) \times 5 = +4 \times 5 = 20$

$a + 7 = -4 + 7 = 3$

Chapitre II

EXERCICE 2.2 –

$\frac{48}{90} = \frac{2 \times 24}{2 \times 45} = \frac{24}{45} = \frac{3 \times 8}{3 \times 15} = \frac{8}{15}$

$\frac{114}{1900} = \frac{2 \times 57}{2 \times 950} = \frac{57}{950} = \frac{3 \times 19}{10 \times 19 \times 5} = \frac{3}{50}$

$\frac{576}{32} = \frac{4 \times 144}{4 \times 8} = \frac{144}{8} = \frac{12 \times 12}{2 \times 4} = \frac{2 \times 6 \times 3 \times 4}{2 \times 4}$

$= \frac{18}{1} = 18$

$\frac{69}{46} = \frac{3 \times 23}{2 \times 23} = \frac{3}{2}$

$\frac{78}{91} = \frac{2 \times 3 \times 13}{7 \times 13} = \frac{6}{7}$

$\frac{30}{65} = \frac{5 \times 6}{5 \times 13} = \frac{6}{13}$

EXERCICE 2.14 – Soit x le montant de la fortune de Maxime.

Il en dépense d'abord les $\frac{2}{3}$ soit : $\frac{2}{3}x$.

Il lui reste donc : $x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$.

Puis il dépense la moitié de ce qu'il lui restait, soit : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x$.

Il ne lui reste alors que : $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x$.

De sa fortune, il ne reste que $\frac{1}{6}$.

Chapitre III

EXERCICE 3.10 –

$A = 7{,}5 \times 10^{-2} \times 0{,}8 \times 10^{4}$

$A = \frac{75}{10} \times \frac{8}{10} \times 10^{-2} \times 10^{4}$

$A = \frac{3 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 5 \times 2 \times 5} \times 10^{-2+4}$

$A = \frac{3 \times 2}{1} \times 10^{2}$ $\boxed{A = 600}$

$B = 10^{-3} \times 10^{3} \times 10^{5}$

$B = 10^{-3+3+5}$

$\boxed{B = 10^{5} = 100\,000}$

$C = (7{,}5 \times 10^{-2} - 0{,}8) \times 10^{4}$

$C = 7{,}5 \times 10^{-2} \times 10^{4} - 0{,}8 \times 10^{4}$

$C = 7{,}5 \times 10^{-2+4} - 0{,}8 \times 10^{4}$

$C = 7{,}5 \times 10^{2} - 0{,}8 \times 10^{4}$

$C = 750 - 8\,000$

$\boxed{C = -7\,250}$

EXERCICE 3.12 –

$(-3)^{17} = (-1 \times 3)^{17} = (-1)^{17} \times 3^{17} = -3^{17} < 0$

$(-3)^{12} = (-1 \times 3)^{12} = (-1)^{12} \times 3^{12} = 3^{12} > 0$

$-3^{19} < 0$

$-3^{12} < 0$

EXERCICE 3.20 –

a) $4 \times (6 + 3)^2 = 324$

b) $(19 - 3^2) \times 4{,}2 = 42$

c) $(10 + 2 \times 5^2)^2 = 3600$

d) $2^2 \times (2 + 4 \times 2)^2 = 400$

Chapitre IV

EXERCICE 4.7 –

$A = (5x - 3)(2x + 3)$

$A = (5 \times 2)x^2 + (5 \times 3)x - (3 \times 2)x - 3 \times 3$

$A = 10x^2 + 15x - 6x - 9$ $\boxed{A = 10x^2 + 9x - 9}$

$B = (2x - 5)^2$

$B = (2x - 5)(2x - 5)$

$B = (2 \times 2)x^2 - (2 \times 5)x - (2 \times 5)x + 5 \times 5$

$B = 4x^2 - 10x - 10x + 25$ $\boxed{B = 4x^2 - 20x + 25}$

$C = (2x + 1)^2$

$C = (2x + 1)(2x + 1)$

$C = (2 \times 2)x^2 + (2 \times 1)x + (2 \times 1)x + 1 \times 1$

$C = 4x^2 + 2x + 2x + 1$ $\boxed{C = 4x^2 + 4x + 1}$

$D=(7x+1)(3x-1)$
$D=(7\times3)x^2-(7\times1)x+(1\times3)x-1\times1$
$D=21x^2-7x+3x-1$ $\boxed{D=21x^2-4x-1}$

EXERCICE 4.17 –
a) $10x$: recette des places en virage
15000-x : nombre de places en tribune
(15000-x)$\times$13 : recette des places en tribune

b) $10x$+(15000-x)$\times$13=195000-3x

c) Si x = 6500, la recette est de 175500 €.

Chapitre V

EXERCICE 5.5 –
a) Méthode N°1 :

$$\frac{4(2x-3)}{3}=4-\frac{3(x-3)}{5}$$
$$\frac{4}{3}(2x-3)=4-\frac{3}{5}(x-3)$$
$$\frac{8}{3}x-4=4-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$$
$$\frac{8}{3}x+\frac{3}{5}x=4+\frac{9}{5}+4$$
$$\frac{8\times5}{3\times5}x+\frac{3\times3}{5\times3}x=\frac{4\times5}{5}+\frac{9}{5}+\frac{20}{5}$$
$$\frac{40+9}{15}x=\frac{20+9+20}{5}$$
$$\frac{49}{15}x=\frac{49}{5}$$
$$x=\frac{49}{5}\times\frac{15}{49}$$
$$\boxed{x=3}$$

b) Méthode N°2 :

$$\frac{2(x+7)}{5}-\frac{x-9}{3}+3=\frac{3x+16}{15}$$
$$\frac{2x+14}{5}-\frac{x-9}{3}+3=\frac{3x+16}{15}$$
$$\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}-\left(\frac{1}{3}x-\frac{9}{3}\right)+3=\frac{3}{15}x+\frac{16}{15}$$
$$\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{3}{15}x=\frac{16}{15}-\frac{42}{15}-\frac{9}{3}-3$$
$$\frac{2\times3}{5\times3}x-\frac{1\times5}{3\times5}x-\frac{3}{15}x=\frac{16}{15}-\frac{42}{15}-\frac{9\times5}{3\times5}-3$$
$$\frac{6-5-3}{15}x=\frac{16-42-90}{15}$$
$$\frac{-2}{15}x=\frac{-116}{15}$$
$$x=\frac{-116}{15}\times\frac{15}{-2}$$
$$\boxed{x=58}$$

c) Méthode N°3 :

$$\frac{3(4x-5)}{5}+1=\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+4}{5}$$
$$\frac{3\times3(4x-5)}{3\times5}+\frac{15}{15}=\frac{5\times2(x-1)}{5\times3}-\frac{3(x+4)}{3\times5}$$
$$9(4x-5)+15=10(x-1)-3(x+4)$$
$$36x-45+15=10x-10-3x-12$$
$$36x-10x+3x=-10-12+45-15$$
$$29x=8$$
$$\boxed{x=\frac{8}{29}}$$

EXERCICE 5.17 -

Soit x le premier entier. Les deux suivants sont donc : x+1 et x+2.

Donc :
x (x+2) = (x+1)² et x²+ 2x = x²+ 2x+1 donc 1 = 0, ce qui n'est pas possible.

Chapitre VI

EXERCICE 6.7 –
a) - 3 < x < 3,3
b) 0,9 < x < 4,875

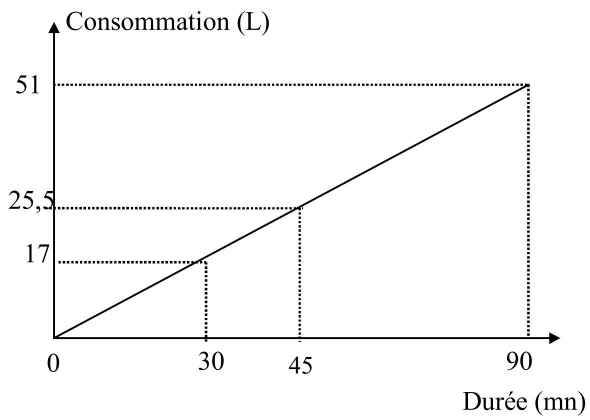
EXERCICE 6.11 –
On sait que a < b donc a + c < b + c.
On sait que c < d donc b + c < b + d.
Ainsi : a + c < b + d

Chapitre VII

EXERCICE 7.3 –

Consommation	**(en litres)**	17	51	***25,5***
Durée	**(en minutes)**	30	***90***	45

La consommation pour 1h30 mn d'utilisation est de 51L.
La durée d'utilisation pour une consommation de 25,5L est de 45 mn.



EXERCICE 7.14 –

En utilisant le formule : d = v x t, on obtient :
T = 0,06/20 = 0,003
Temps aller : 0,003 h

T = 0,06/12 = 0,005
Temps retour : 0,005 h

0,005+0,003 = 0,008
Temps total : 0,008 h

V = 0,12 / 0,008 = 15
Vitesse moyenne totale = 15 km/h.

Chapitre VIII

EXERCICE 8.8 –

$$\frac{12\times 5+8\times 3+9\times 2}{5+3+2}=10{,}2$$

Kévin a réussi son concours car sa moyenne de 10,2 est supérieure à 10.

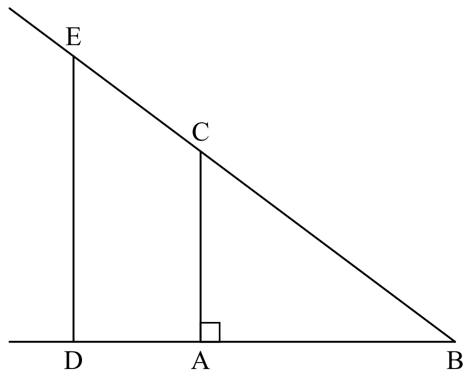
Chapitre IX

EXERCICE 9.6 –

RF²+FG² = 1/9+1/16 = 25/144
RG² = 25/144
Donc RG² = RF²+FG²
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RGF est rectangle en F.

Chapitre X

EXERCICE 10.4 –



AB = 4 cm et AC = 3 cm
a) ABC est un triangle rectangle en A.
Avec le théorème de Pythagore on a :
$BC^2 = BA^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
<u>BC = 5 cm</u>

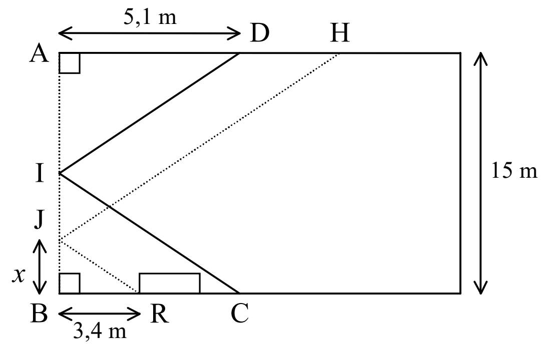
b) (BE) et (BD) sont sécantes en B.
(ED) et (AC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BD}=\frac{CA}{ED}$$

D'où : $BE=\dfrac{BD\times BC}{BA}=\dfrac{6\times 5}{4}=\dfrac{15}{2}$

<u>BE = 7,5 cm</u>

EXERCICE 10.14 –



Le champ d'action du jet ne varie pas si on le « translate » de I vers J. Par conséquent, (IC) est parallèle à (JR). J appartient à [BI] et R appartient à [BC]. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BJ}{BI}=\frac{BR}{BC}=\frac{JR}{IC}$$

D'où : $BJ=\dfrac{BI\times BR}{BC}$

Avec $BI=\dfrac{15}{2}=7{,}5\text{ m}$

$BC = AD = 5{,}1\text{ m}$ car le jet arrose symétriquement.

Soit : $x=\dfrac{7{,}5\times 3{,}4}{5{,}1}=5$

<u>Il faut placer le jet au plus à 5 m de B.</u>

On a aussi (ID) parallèle à (JH), I appartenant à [AJ] et D appartenant à [AH]. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AD}{AH} = \frac{AI}{AJ} = \frac{DI}{HJ}$$

D'où : $AH = \frac{AD \times AJ}{AI}$ $\quad AH = \frac{5{,}1 \times 10}{7{,}5} = 6{,}8\text{ m}$

AH < 7 m. Le tout jeune orme sera dans le rayon d'action du jet et pourra profiter de son arrosage.

Chapitre XI

EXERCICE 11.5 –

La somme des angles d'un triangle est de 180°.
Ainsi dans le triangle AXQ, l'angle $A\hat{Q}X$ est égal à 80°. I est le point d'intersection de deux bissectrices, donc la troisième passe aussi par I. (QI) est la bissectrice issue de Q dans le triangle AXQ.

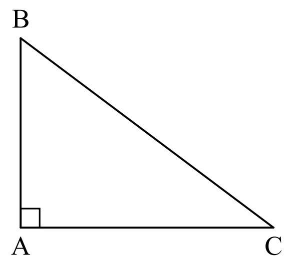
angle $I\hat{Q}X$ = angle $A\hat{Q}X$ / 2 = 40°

angle $I\hat{X}Q$ = angle $A\hat{X}Q$ /2 = 20°

D'où : angle $X\hat{I}Q$ = 180-40-20 = 120°

Chapitre XII

EXERCICE 12.1 –



$$\cos(A\hat{B}C) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

Calcul de BC.
ABC est un triangle rectangle en A, on peut utiliser le théorème de Pythagore :
$BC^2 = BA^2 + AC^2$
$BC^2 = 3^2 + 4^2$
$BC^2 = 9 + 16$
$BC^2 = 25$
$BC = 5$

$$\boxed{\cos(A\hat{B}C) = \frac{3}{5} = 0{,}6}$$

$A\hat{B}C = \cos^{-1}(0{,}6) \approx 53{,}13°$

$\boxed{A\hat{B}C \approx 53°}$

La somme des angles d'un triangle est 180°, d'où : $A\hat{C}B = 180 - (90 + 53)$

$A\hat{C}B = 180 - 143$

$\boxed{A\hat{C}B = 37°}$

$$\cos(A\hat{C}B) = \frac{CA}{CB}$$

$$\cos(A\hat{C}B) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$A\hat{C}B = \cos^{-1}(0{,}8) \approx 36{,}87°$

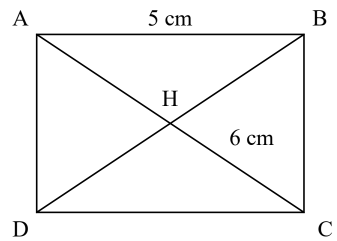
$\boxed{A\hat{C}B \approx 37°}$

On retrouve bien le même résultat.

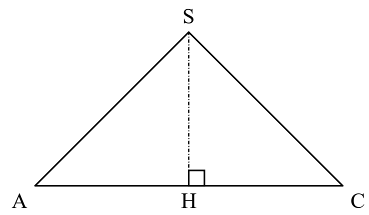
Chapitre XIII

EXERCICE 13.6 –

a)



Le triangle SAC est isocèle de sommet principal S et de hauteur [SH] qui est aussi médiane.



La pyramide admettant pour hauteur le segment issu du centre de sa base, elle est régulière. Par conséquent toutes ses arêtes ont la même mesure.

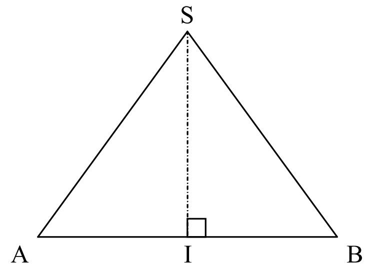
La longueur d'une arête de la pyramide est obtenue en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle SHC ou SHA, rectangles en H.

$SC^2 = SH^2 + HC^2$

$SC^2 = 3^2 + 3^2$ $\qquad SC^2 = 18$

$SC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2\text{ cm}$

Les triangles SAB et SBC sont isocèles de sommet principal S et de longueur de côté SC. Cette mesure ne tombant pas juste, on la reportera avec le compas.



La longueur de la base [BC] du triangle BCS est obtenue en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ d'où $BC^2 = AC^2 - AB^2$

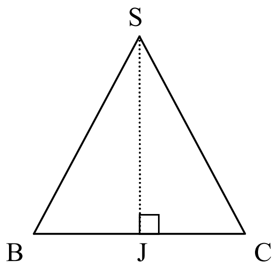
$BC^2 = 6^2 - 5^2$

$BC^2 = 36 - 25$

$BC^2 = 11$

$BC = \sqrt{11} \approx 3{,}3\,\text{cm}$

Là aussi on reportera avec le compas la mesure prise sur le rectangle ABCD. Puis on tracera la médiatrice du segment [BC].



b) L'aire latérale de la pyramide est obtenue en additionnant les aires des quatre triangles qui la limitent.

$\mathcal{A}_{SABCD} = 2 \times \mathcal{A}_{SAB} + 2 \times \mathcal{A}_{SBC}$

$\mathcal{A}_{SAB} = \dfrac{AB \times SI}{2}$ et $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{CB \times SJ}{2}$

$\mathcal{A}_{SABCD} = AB \times SI + CB \times SJ$

Calcul de SI avec Pythagore dans le triangle SIA rectangle en I :

$SA^2 = SI^2 + AI^2$ d'où $SI^2 = SA^2 - AI^2$

$SI^2 = 18 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$ $\qquad SI^2 = 18 - \dfrac{25}{4}$

$SI^2 = \dfrac{4 \times 18 - 25}{4}$ $\qquad SI = \sqrt{\dfrac{47}{4}} = \dfrac{\sqrt{47}}{2}$

Calcul de SJ avec Pythagore dans le triangle SJB rectangle en J :

$SB^2 = SJ^2 + BJ^2$ d'où $SJ^2 = SB^2 - BJ^2$

$SJ^2 = 18 - \left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$ $\qquad SJ^2 = 18 - \dfrac{11}{4}$

$SJ^2 = \dfrac{4 \times 18 - 11}{4}$ $\qquad SJ = \sqrt{\dfrac{61}{4}} = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\mathcal{A}_{SABCD} = AB \times SI + CB \times SJ$

$\mathcal{A}_{SABCD} = 5 \times \dfrac{\sqrt{47}}{2} + \sqrt{11} \times \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\boxed{\mathcal{A}_{SABCD} \approx 30{,}1\ \text{cm}^2}$

c) Le volume de la pyramide est obtenu grâce à la formule :

$\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3}\ \mathcal{A}_{ABCD} \times SH$

$\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \times AB \times BC \times SH$

$\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \times 5 \times \sqrt{11} \times 3$

$\mathcal{V}_{SABCD} = 5\sqrt{11}$

$\boxed{\mathcal{V}_{SABCD} \approx 16{,}6\ \text{cm}^3}$