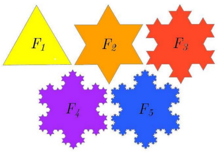


Suites numériques

Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :

✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$

✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations

✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante

✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : nbre termes $\times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$S_n = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Suites géométriques

Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1-q}$

$S_n = 1 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

Raisonnement par récurrence

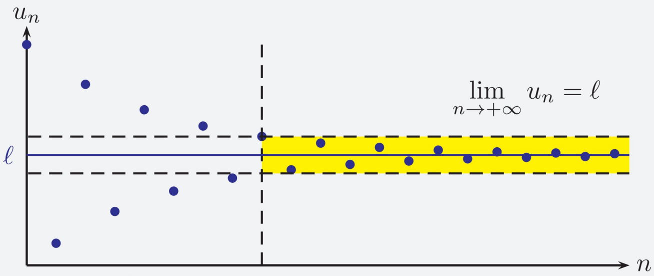
But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0

✧ Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $n+1$

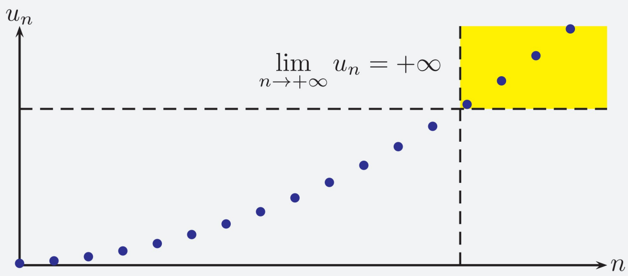
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Limites d'une suite géométrique

✧ Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

✧ Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

✧ Si $q \geq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Convergence d'une suite monotone

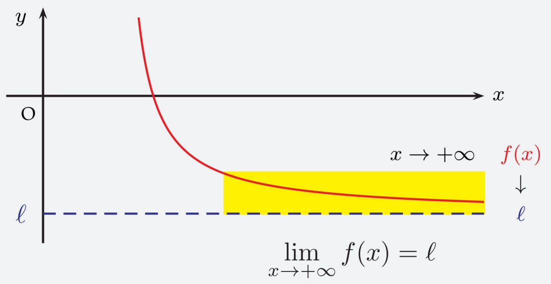
Une suite (u_n) est majorée [resp. minorée] si, et seulement si, il existe un réel M [resp. m] tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ [resp. $u_n \geq m$]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée

✧ Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge

✧ Une suite croissante de limite ℓ est majorée par ℓ

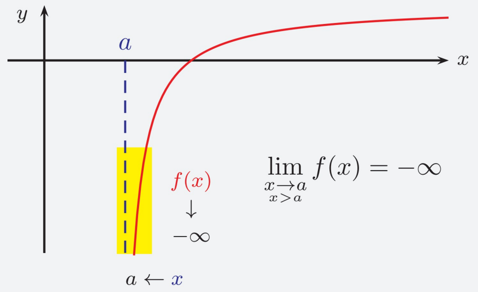
Limites et continuité

Asymptote horizontale



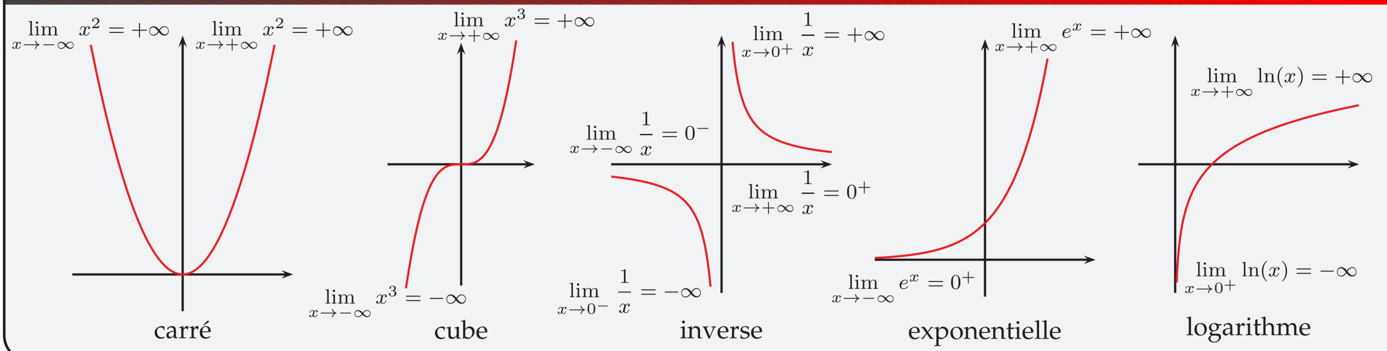
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$

Asymptote verticale



Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

Limites des fonctions usuelles



Opérations sur les limites

$\lim f$	0	0	∞	0	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim g$	0	∞	0	ℓ	0	∞	ℓ	∞
$\lim(f+g)$	0	∞	∞	ℓ	ℓ	∞	∞	∞/FI
$\lim(f \times g)$	0	FI	FI	0	0	∞	∞	∞
$\lim(f \div g)$	FI	0	∞	0	∞	0	∞	FI

$\ell \neq 0$, règle des signes pour les résultats « ∞ »

Théorèmes de comparaison

f, g, h sont trois fonctions. Si, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- ✧ théorème des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$

Limites particulières

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

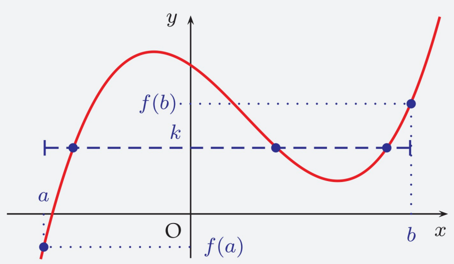
Fonctions composées

$$\underbrace{x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g\left(f(x)\right)}_{g \circ f}$$

si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{X \to \ell} g(X) = L \end{cases}$

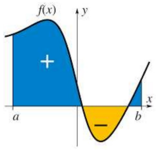
alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = L$

Théorème des valeurs intermédiaires



Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;b]$

Si de plus f est strictement monotone, α est unique



Dérivation et intégration

Dérivée et tangente

Nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangente au point $A(a, f(a))$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Primitive

Primitive de f sur I : fonction F continue, dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

dérivée ↓ / primitive ↑

k	x^n	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0	$n\,x^{n-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

dérivée ↓ / primitive ↑

$u+v$	$u \times v$	ku	u^n	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u}{v}$	e^u	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'+v'$	$u'v + uv'$	ku'	$nu'u^{n-1}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$u'\,e^u$	$\dfrac{u'}{u}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Variations d'une fonction

- ✧ f croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Propriétés des primitives

- ✧ Toute fonction continue admet des primitives
- ✧ Primitives de f : fonctions G telles que $G(x) = F(x) + k$
- ✧ Si de plus $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique

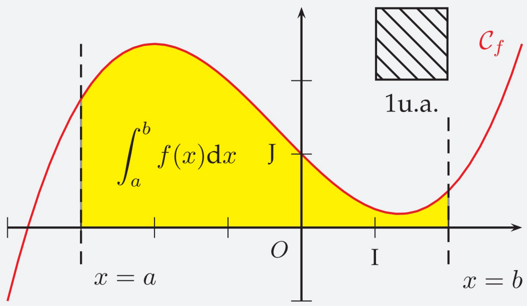
Intégrale

Intégrale de f positive sur $[a, b]$: aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

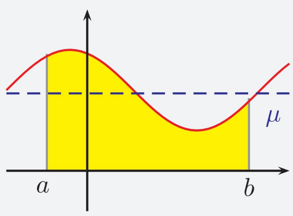
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ

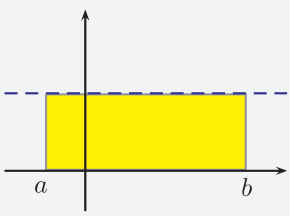
Si f est négative, l'aire vaut $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Calcul d'intégrales

- ✧ Soit f continue positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, la fonction F définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ✧ Valeur moyenne de f sur $[\,a\,;\,b\,]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$





Propriétés des intégrales

f et g sont deux fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$:

- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
- ✧ $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

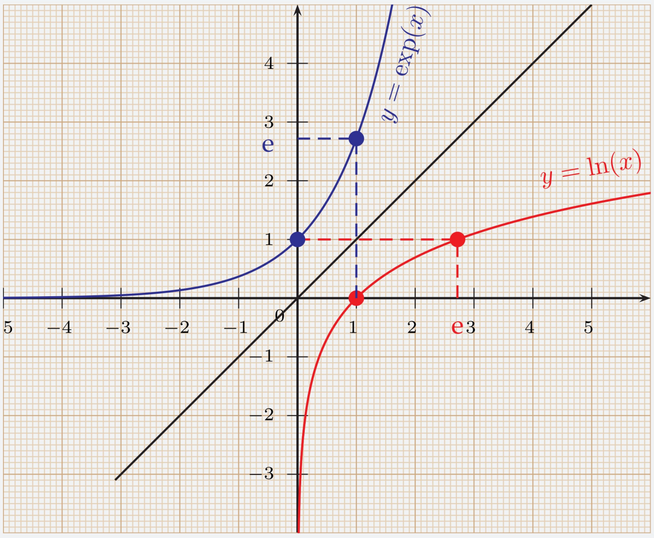
$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$
définie sur $\mathbb{R}$
à valeurs dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$\mathrm{e}^0 = 1$
$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,718$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$
définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$
à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\ln(1) = 0$
$\ln(\mathrm{e}) = 1$

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

- ✧ Produit : $\mathrm{e}^a \times e^b = \mathrm{e}^{a+b}$
- ✧ Inverse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$
- ✧ Quotient : $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
- ✧ Puissance : $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{an}$
- ✧ Racine carrée : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

- ✧ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ✧ Inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ✧ Quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ✧ Puissance : $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- ✧ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

- ✧ $\ln(\exp x) = x$ $\qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x$
- ✧ $\exp(\ln x) = x$ $\qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
- ✧ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $\qquad \mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y)$
- ✧ $x^y = \exp(y\ln(x))$ $\qquad x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

- ✧ $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^v \iff u = v$ $\qquad \mathrm{e}^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u > \mathrm{e}^v \iff u > v$ $\qquad \mathrm{e}^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^v \iff u \leq v$ $\qquad \mathrm{e}^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u \leq 0$ impossible et $\mathrm{e}^u > 0$ toujours vrai

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

- ✧ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\qquad \ln(u) = \lambda \iff u = \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\qquad \ln(u) > \lambda \iff u > \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\qquad \ln(u) \leq \lambda \iff u \leq \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissance comparée et limites particulières

$\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Probabilités discrètes

Rappel sur les probabilités et variables aléatoires

$P(\varnothing)=0$; $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\Omega)=1$; $P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

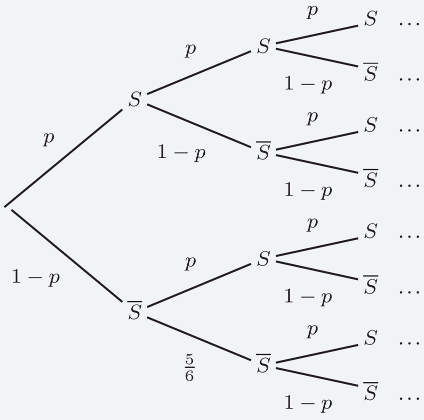
Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$; Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$; Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Loi de Bernoulli

Expérience qui n'a que deux issues possibles : « succès » de probabilité p et « échec » de probabilité $1-p$

Notation : $\mathcal{B}(p)$
$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$
$E(X)=p$
$V(X)=p(1-p)$
$\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

Arbre pondéré de la loi binomiale



Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X est égale au nombre de succès.

Notation : $\mathcal{B}(n;p)$; $q=1-p$

$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k \times q^{n-k}$
$E(X)=np$
$V(X)=npq$
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ avec $P(A)\neq 0$

Cas d'équiprobabilité sur Ω : $P_A(B)=\dfrac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(A)}$

Probabilités composées : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

Probabilités totales avec $\{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\}$ formant une partition de Ω :

$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)$

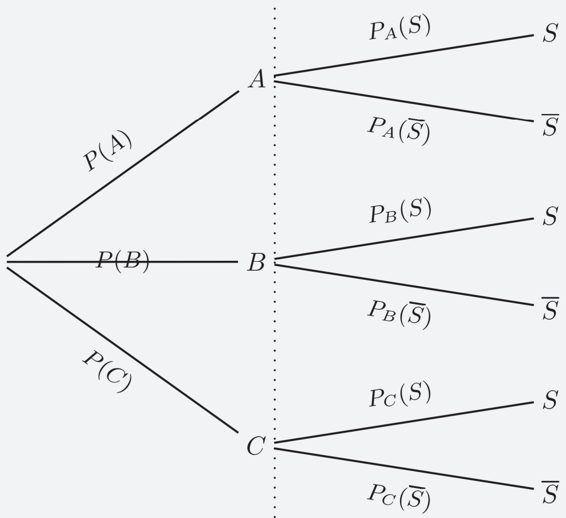
Indépendance de deux événements

A et B indépendants
$\iff P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
$\iff P_A(B)=P(B)$
$\iff P_B(A)=P(A)$

A et B indépendants
$\iff \overline{A}$ et B indépendants
$\iff A$ et $\overline{B}$ indépendants
$\iff \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Arbre de probabilité

probabilités simples | *probabilités conditionnelles* | *probabilités composées* | *probabilités totales*



$P(A\cap S)=P(A)\times P_A(S)$

$P(A\cap \overline{S})=P(A)\times P_A(\overline{S})$

$P(B\cap S)=P(B)\times P_B(S)$

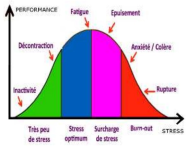
$P(B\cap \overline{S})=P(B)\times P_B(\overline{S})$

$P(C\cap S)=P(C)\times P_C(S)$

$P(C\cap \overline{S})=P(C)\times P_C(\overline{S})$

$P(S)=$
$P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S)$

$P(\overline{S})=$
$P(A\cap\overline{S})+P(B\cap\overline{S})+P(C\cap\overline{S})$



Probabilités continues

Variable aléatoire à densité sur I

Fonction de densité sur I : fonction f continue et positive sur I telle que

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

✧ $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

✧ $P(X = a) = 0$

✧ $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$

✧ $P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t)$

✧ $E(X) = \int_I t f(t)\,\mathrm{d}t$

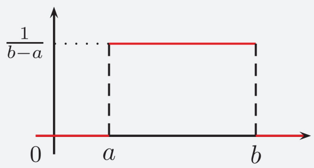
Loi uniforme sur $[\,a\,,b\,]$

Notation : $\mathcal{U}\,[\,a\,,b\,]$

$f(t) = \dfrac{1}{b-a}$

$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$



Loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$

Notation : $\mathcal{E}(\lambda)$

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$

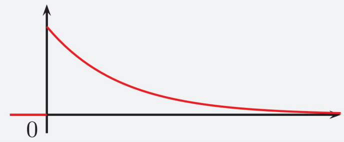
$P(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$

$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$

$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$



Théorème de Moivre-Laplace

✧ $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

✧ X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$

✧ $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

Loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$

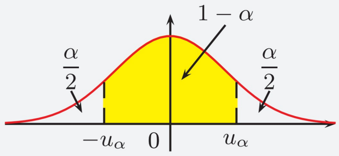
Notation : $\mathcal{N}(0;1)$

$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

$\forall\,\alpha \in \,]\,0\,;1\,[\,, \exists\,!\, u_\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$



$P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) = 0,95$

$P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) = 0,99$

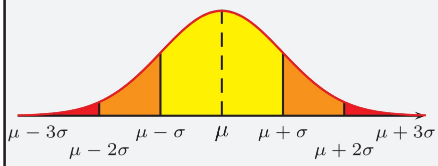
Loi normale sur $\mathbb{R}$

Notation : $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

$E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2) \iff$

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$



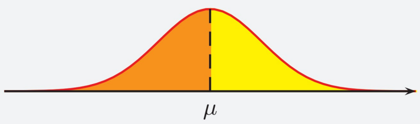
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,96$

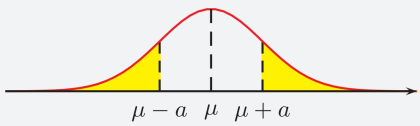
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Propriétés des lois normales

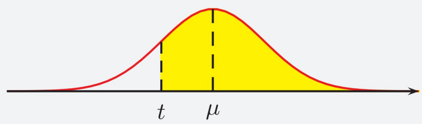
$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5$



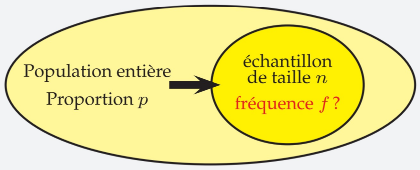
$P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$



$P(X > t) = 0,5 + P(t < X < \mu)$



Intervalle de fluctuation



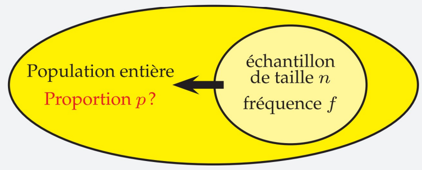
Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $1-\alpha$

$$I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$

à 95 % : $u_{0,05} = 1,96$ et à 99 % : $u_{0,01} = 2,58$

Intervalle de confiance



Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95 %

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$; $n(1-f) \geq 5$