# Sommaire

# Partie A : RESUMES DE COURS

# Chapitre I : LIMITES ET CONTINUITE

## I. LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

### 1° Limite en l'infini

#### a - Limite finie en l'infini

**Si, quand x tend vers + ∞ (ou vers - ∞), f(x) devient de plus en plus proche d'un réel L,** on dit que la limite de f(x) quand x tend vers plus (ou moins) l'infini est L.

On écrit : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

**Exemple :** $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. L=1

#### b - Limite infinie en l'infini

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

**Exemples :** $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x$, $f(x) = -x^3$.

### 2° Limite en un point

#### a - Limite infinie en a

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]b;+\infty[$, b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

**Exemples :** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en a = 0, $f(x) = \frac{1}{x}$ en a = 0.

#### b - Limite finie en a

**Si, quand x tend vers a, f(x) devient de plus en plus proche d'un réel L,** on dit que la limite de f(x) quand x tend vers a, est L.

On écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = L$

**Exemple :** $f(x) = 2x + 1$ en a = 1 L=3

- Certaines fonctions n'admettent pas de limite. Par exemple les fonctions $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$ n'admettent pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

- Pour qu'une fonction f admette une limite en un réel a, il faut que f soit définie en a ou bien que a soit une borne de l'intervalle de définition de f.

- Pour qu'une fonction f admette une limite à l'infini, il faut nécessairement que f soit définie au moins sur un intervalle du type $[m\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;m]$ (m un réel) .

## 3° Limites des fonctions usuelles

### a - Fonctions usuelles

Les résultats suivants sont très souvent utilisés :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Si** | $f(x) = x$<br>$f(x) = x^2$<br>$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$<br>$f(x) = \sqrt{x}$ | **alors** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$<br><br>$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ |
| **Si** | $f(x) = \frac{1}{x}$<br>$f(x) = \frac{1}{x^2}$<br>$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$<br>$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | **alors** | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ |
| **Si** | $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ | **alors** | $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ |

## 4° Opérations algébriques sur les limites

Les limites peuvent être additionnées, multipliées ou divisées entre elles la plupart du temps sans problèmes.
Dans les paragraphes suivants, on considère deux fonctions f et g ayant respectivement une limite finie L et L' ou une limite infinie ($\pm\infty$) en a (où a est soit un réel, soit $\pm\infty$).

Le terme ***« indéterminée »*** signifie qu'il n'y a pas de règle générale permettant de conclure. Il convient alors de déterminer cette limite d'une autre façon, le plus souvent en tentant d'exprimer la fonction sous une autre forme. On dit que c'est une forme indéterminée.

### a - Addition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de **f + g** en ce même point ou à l'infini.

| $+$ | | Lim g | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **L** | **$+\infty$** | **$-\infty$** |
| **Lim f** | **L'** | L+L' | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | **$+\infty$** | $+\infty$ | $+\infty$ | ***indéterminée*** |
| | **$-\infty$** | $-\infty$ | ***indéterminée*** | $-\infty$ |

### b - Multiplication

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de **f × g** en ce même point ou à l'infini.

| $\times$ | | Lim g | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **L** | **0** | **$+\infty$** | **$-\infty$** |
| **Lim f** | **L'** | L L' | 0 | $+\infty$ si $L' > 0$<br>$-\infty$ si $L' < 0$ | $-\infty$ si $L' > 0$<br>$+\infty$ si $L' < 0$ |
| | **0** | 0 | 0 | ***indéterminée*** | ***indéterminée*** |
| | **$+\infty$** | $+\infty$ si $L > 0$<br>$-\infty$ si $L < 0$ | ***indéterminée*** | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | **$-\infty$** | $-\infty$ si $L > 0$<br>$+\infty$ si $L < 0$ | ***indéterminée*** | $-\infty$ | $+\infty$ |

### c - Quotient

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ en ce même point ou à l'infini.

| $\div$ | | Lim f | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **$L \neq 0$** | **0** | **$+\infty$** | **$-\infty$** |
| **Lim g** | **$L' \neq 0$** | $\frac{L}{L'}$ | 0 | $+\infty$ si $L' > 0$<br>$-\infty$ si $L' < 0$ | $-\infty$ si $L' > 0$<br>$+\infty$ si $L' < 0$ |
| | **0** | $\pm\infty$ | ***indéterminée*** | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| | **$+\infty$** | 0 | 0 | ***indéterminée*** | ***indéterminée*** |
| | **$-\infty$** | 0 | 0 | ***indéterminée*** | ***indéterminée*** |

### d - **Formes indéterminées**

| |
|---|
| « $+\infty-\infty$ », « $\dfrac{0}{0}$ » , « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $0\times\infty$ » |

**Exemples :** Les fonctions polynômes ou les fonctions rationnelles. On peut ainsi démontrer qu'en $\pm\infty$, **la fonction polynôme** a même limite que son terme de plus haut degré et **la fonction rationnelle** a même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Pour lever l'indétermination d'une expression (somme ou soustraction) contenant une racine carrée $\sqrt{\ }$, il suffit dans la plupart des cas de multiplier par l'expression conjuguée.

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+1}-1) \times (\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$

## 5° Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants permettent de trouver la limite d'une fonction f en a(qui peut être un réel, ou $\pm\infty$) par comparaison à d'autres fonctions u, v, w… dont on connaît la limite.
On désigne par $\ell$ un réel.

### a - **Théorème des gendarmes**

- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour x proche de a et si u et v admettent la même limite $\ell$ en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

De même :

- Si $|f(x)-\ell| \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

**Exemple :** Limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

Pour tout x réel : $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où : $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

### b - **Comparaison à l'infini**

- Si $u(x) \leq f(x)$ pour x proche de a et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

## 6° Limite d'une fonction composée

Soient a, b et $\ell$ désignant des réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$.

**Exemple :** Etude de la limite en 0 de la fonction f : $x \rightarrow \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

Pour tout x non nul, f s'écrit : $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \dfrac{\sin(2x)}{2x}$.

On applique le théorème : $\lim\limits_{x \to 0} (2x) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$,

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

## 7° Limites à gauche et à droite

### a - Définition et notation

On dit que f admet $\ell$ (fini ou infini) comme **limite à gauche** en a (a réel), si la restriction de f(x) à $]-\infty\,;\,a]$ ou $]-\infty\,;\,a[$ admet $\ell$ comme limite en a. On note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \ell$

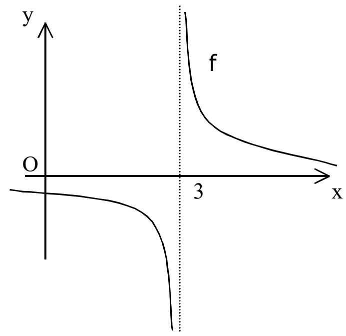
On définit de même la **limite à droite** et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell$.

**Exemple :**

La fonction f définie pour $x \neq 3$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ n'a pas de limite en 3.

On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche et $+\infty$ comme limite à droite.




### b - Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a un élément de I ou une borne de I et $\ell$ désignant un réel ou $\pm\infty$.
Si f est telle que $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell$, alors f admet $\ell$ comme limite en a.

## 8° Asymptote horizontale et verticale

On considère une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (a réel), alors la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à $C_f$.

**Exemple :** Si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale à $C_f$ en $+\infty$.

🗁 Asymptote horizontale

Dans le cas où **la fonction admet une limite finie L quand x tend vers l'infini**, on observe que la courbe représentative de la fonction se rapproche toujours davantage d'une droite horizontale sans jamais la toucher. **On dit que la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale.**

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ( $\ell$ réel), alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $C_f$.

**<u>Exemple</u> :** Si $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation y = 1 est donc asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$. On remarquera qu'elle est aussi asymptote horizontale à $C_f$ en $-\infty$.

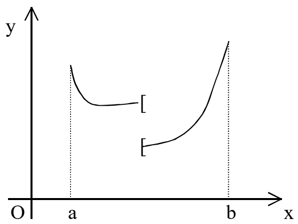
# II. CONTINUITE ET THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

## 1° Définition d'une fonction continue

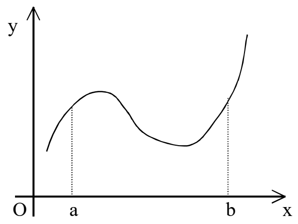
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
- f est **continue en un point a** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est **continue sur l'intervalle I** si f est continue en tout point a de I.

Graphiquement, dire que f est continue sur I signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture sur I: On peut la tracer « sans lever le crayon ».

**<u>Exemples</u> :**




Cette fonction n'est pas continue sur [ a ; b ]




Cette fonction est continue sur [ a ; b ]

<u>Propriétés :</u>

- Toute fonction polynôme est continue sur ℝ.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur ℝ.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

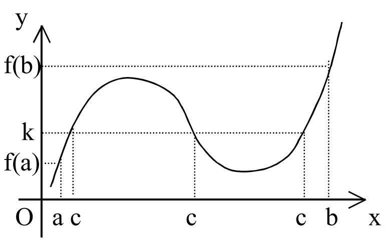
## 2° Opérations sur les fonctions continues

Si $u$ et $v$ sont continues sur I, alors $u + v$, $u \times v$ et $u^n$ ($n$ entier naturel non nul) sont continues sur I. $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
Si la fonction $f$ est continue en $a$ et si la fonction $g$ est continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en $a$.

## 3° Théorème des valeurs intermédiaires

### a - Enoncé

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels dans I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k .

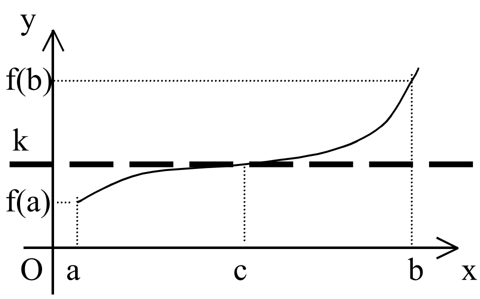



Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type : f(x) = k .

### b - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue **strictement monotone** sur [ a ; b ] ( c'est à dire si $f'(x) > 0$ pour tout x de [a ; b] ou si $f'(x) < 0$ pour tout x de [ a ; b] ), alors :

- Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède une unique solution c dans [ a ; b ] .
- L'image de [ a ; b ] par f est l'intervalle [f(a) ; f(b)]. La fonction f réalise en fait une bijection de [a ; b ] sur [ f(a) ; f(b)] si f est croissante ( ou [ f(b) ; f(a) ] si f est décroissante) .




**Remarque :** On admet que ce théorème se prolonge au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ] a ; b [ (a et b finis ou infinis) ou semi-ouvert ( ] a ; b ] ou [ a ; b [ ), dans le cas où les limites de f aux bornes de l'intervalle sont connues.

Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type f(x) = k .

On peut ensuite calculer une valeur approchée de l'équation f(x) = k par dichotomie ou balayage avec la calculatrice.

# Chapitre II : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS

# I. Dérivation

## 1° Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_o$ un point de I.

### a - Fonction dérivable

On dit que **f est dérivable en $x_0$** si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

La fonction : $h \rightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers un réel L quand h tend vers 0.

La fonction : $x \rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers un réel L quand x tend vers $x_0$.

Si la fonction f est dérivable en tout point $x_0$ de l'intervalle I, on dit que la fonction f est dérivable sur I.

### b - Nombre dérivé

Le réel L définit au paragraphe précédent est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en $x_0$** et est noté : **$f'(x_0)$.** On note ainsi :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou } f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Lorsque les expressions de f sont différentes suivant que $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$, on cherche les **limites à droite et à gauche de** $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Ces limites, lorsqu'elles existent et sont finies, sont appelées respectivement **nombres dérivés à droite ($f_d'(x_0)$) et à gauche**($f_g'(x_0)$) au point $x_0$. Si en un point $x_0$ le nombre dérivé à droite est différent du nombre dérivé à gauche, la fonction n'est pas dérivable en ce point.

**Exemple :** La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. On a $f(x) = -x$ sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0]$ et $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$. On obtient par calcul de limites :
$f_g'(0) = -1$ et $f_d'(0) = +1$. Ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

### c - Fonction dérivée

On définit sur I la fonction $\mathbf{f' : x \rightarrow f'(x)}$. Cette fonction f ' est appelée **la fonction dérivée de la fonction f sur I.**

## 2° Dérivées de fonctions usuelles

Le tableau donne la dérivée des fonctions les plus courantes :

| Fonction | Dérivable sur I | Fonction dérivée |
|---|---|---|
| **f(x) = k,** *k constante réelle* | $I = ]-\infty ;+\infty[$ | $f'(x) = 0$ |
| **f(x) = a x+ b,** *a et b constants* | $I = ]-\infty ;+\infty[$ | $f'(x) = a$ |
| **f(x) = x ⁿ,** *n entier relatif* | $I = ]-\infty ;+\infty[$ si $n \geq 0$<br>$I = ]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$ si $n < 0$ | $f'(x) = n\,x^{n-1}$ |
| $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$ | $I = ]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$ | $I = ]0 ;+\infty[$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| **f(x) = sin (x)** | $I = ]-\infty ;+\infty[$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| **f(x) = cos (x)** | $I = ]-\infty ;+\infty[$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| **f(x) = tan x** | $I = \mathbb{R} \setminus \{ k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{N}\}$ | $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ |

## 3° Dérivées et opérations

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables.

| Opération | Fonction | Dérivée |
|---|---|---|
| **Somme de fonctions** | $u + v$ | $u' + v'$ |
| **Produit par a réel** | $a \times u$ | $a \times u'$ |
| **Fonction à la puissance n** | $u^n$ ( $n \in \mathbb{Z}$ | $n\,u'\,u^{n-1}$<br>( pour $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$ ) |
| **Produit de fonctions** | $u\,v$ | $u'v + u\,v'$ |
| **Inverse d'une fonction** | $\frac{1}{v}$ | $\frac{-v'}{v^2}$ |
| **Quotient de fonctions** | $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| **Racine carrée** | $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ( pour $u(x) > 0$ ) |

## 4° Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout x de I, **v(x) appartient à J.**

La fonction f : $x \to u(v(x)) = u \circ v(x)$ est dérivable sur I et pour tout x de I on a :

$$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

Ce théorème permet de calculer la dérivée d'une fonction $x \to u(v(x))$ quand on sait calculer les dérivées de u et de v.

**<u>Exemple</u> :** Fonction dérivée de u : $x \to \cos(x^2)$ .

La fonction $x \to x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2x$.

La fonction $x \to \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = -\sin x$.

La fonction u = g o f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée :

$u'(x) = g' \circ f(x) \times f'(x) = -\sin(x^2) \times 2x = -2x\sin(x^2)$

## 5° Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

**On dit que f ′ est la fonction dérivée première de f** . On peut aussi la noter : $\frac{df}{dx}$ ou $f^{(1)}$.

Si f ′ est dérivable sur un intervalle I, alors **f ″ est la fonction dérivée seconde de f** . On peut aussi la noter : $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.

Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur intervalle I, alors **$f^{(n)}$ est la fonction dérivée n^ième^ de f** . On peut aussi la noter: $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

## 6° Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
Si f est **dérivable en** a alors f est **continue en a.**
Si f est **dérivable sur I** alors f est **continue sur I.**

**<u>ATTENTION</u> :** La réciproque est fausse. La continuité d'une fonction n'implique pas sa dérivabilité.

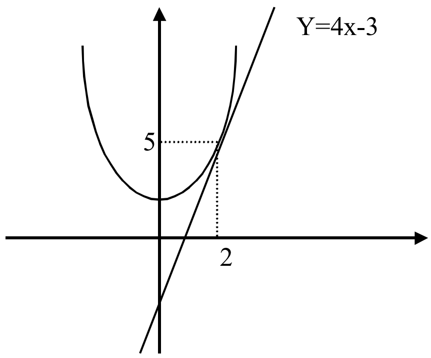
**<u>Exemple</u> :**
La fonction valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.

## 7° Tangente à une courbe

Soit a un point de D domaine de définition de la fonction f. On suppose que f admet le nombre dérivé $f'(a)$ au point a.

On appelle **tangente au point A(a, f(a)) de la courbe $C_f$** (représentation graphique de la fonction f) la droite passant par A et de coefficient directeur $\mathbf{f'(a)}$.
Son équation est : $\mathbf{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$

**Exemple :**
La fonction $f : x \rightarrow x^2 + 1$ admet la droite d'équation $y = 4x - 3$ comme tangente au point d'abscisse $x = 2$.
On a $f'(x)=2x$ d'où $f'(2)=4$ et $f(2)=5$
Donc $y = 4(x-2)+5=4x-3$

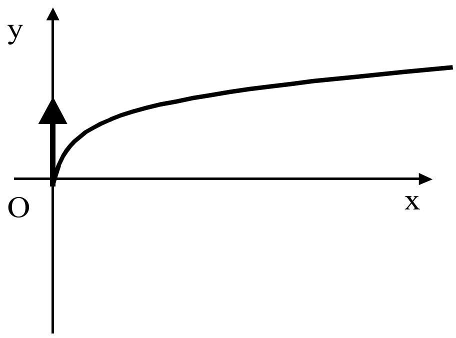



**Remarques :**

- Si f n'admet qu'un nombre dérivé à droite $f'_d(a)$ en a, $C_f$ admet alors une **demi-tangente à droite au point A(a, f(a))** d'équation : $y - f(a) = f'_d(a) \times (x - a)$ pour $x \geq a$.
- Si f n'admet qu'un nombre dérivé à gauche $f'_g(a)$ en a, $C_f$ admet alors une **demi-tangente à gauche au point A(a, f(a))** d'équation : $y - f(a) = f'_g(a) \times (x - a)$ pour $x \leq a$.
- Si f n'est pas dérivable en a et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors $C_f$ admet **au point A(a, f(a)) une tangente verticale.**

**Exemple :**

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ donc sa représentation graphique admet une tangente verticale qui est l'axe des ordonnées.



## II. PLAN D'ETUDE D'UNE FONCTION

Pour étudier une fonction f, les énoncés des exercices vous guideront pour effectuer les étapes suivantes (certaines pouvant ne pas être traitées) :

**1-** Déterminer l'ensemble de définition de f.

**2-** Etudier la parité et la périodicité de la fonction f, le cas échéant, réduire le domaine d'étude de la fonction et en déduire des propriétés géométriques de $C_f$

**3-** Calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle existe. Déterminer le signe de la dérivée.

**4-** Etablir le tableau de variation de f . Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude.

**5-** Si l'énoncé le demande, étudier les éventuelles asymptotes.

**6-** Tracer la courbe représentative de f à l'aide de quelques points et tangentes remarquables, utiliser les éventuelles propriétés géométriques vues aux étapes 2 et 5.

**Remarque :** Ceci est un plan d'étude indicatif. Les exercices d'étude d'une fonction ne respectent pas toujours ces étapes. Il vous faut dans tous les cas respecter les consignes de l'exercice et répondre uniquement aux questions posées.

# Chapitre III : FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

## I. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

### 1° Définition

On appelle **exponentielle de base e** l'unique fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note f(x)=exp(x) = $e^x$

**Démontrons l'unicité de la fonction exponentielle**

On suppose qu'il existe deux fonctions f et g dérivables sur R, égales à leurs propres dérivées et qui prennent la valeur 1 en 0.

Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

On sait que pour tout $x \in R$, $e^x > 0$, donc g(x) ne s'annule pas sur R.

La fonction h est bien dérivable car c'est un quotient de fonctions dérivables sur R.

Pour tout $x \in R$, $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{[g(x)]^2} = 0$

Donc h est constante sur R. Or $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc pour tout réel x, h(x) = 1 , soit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc on a $f(x) = g(x)$.

En conclusion, il n'existe qu'une seule fonction f telle que : f'=f et f(0) = 1.

### 2° Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle : Pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Conséquences :

$e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$ $\qquad$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$(e^{a^n}) = e^{a.n}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad$ $(e^a)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{a}{n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

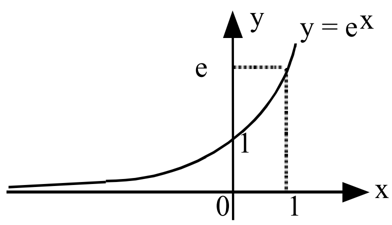
## 3° Etude de la fonction exponentielle

On sait que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(\exp(x))' = \exp(x)$
et que exp(x) > 0 pour tout x donc la fonction exp est **continue** et **strictement croissante** sur$\mathbb{R}$.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$ .

L'image de 1 par la fonction exponentielle est unique et est noté e ( $\exp(1) = e^1 = e$ ) . Ce **nombre e** est un nombre irrationnel proche de 2,718 appelé nombre de Néper.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ .

| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)' = e^x$ | + | | | |
| exp(x) | 0 ↗ | 1 ↗ | e ↗ | $+\infty$ |




## 4° Propriété d'équivalence pour la résolution d'équation et d'inéquation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur R, donc on a les propriétés suivantes :
Pour tous réels a et b, on a les équivalences suivantes :

1 ) $\quad e^a = e^b \quad$ équivaut à $\quad a = b$

2) $\quad e^a \le e^b \quad$ équivaut à $\quad a \le b$

( L'équivalence est aussi vraie pour les symboles : $\ge$ , $<$ et $>$ ).

<u>Démontrons que</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

1) Posons $f(x) = e^x$ - x et étudions ses variations sur [0 ; + $\infty$[.
Pour tout x $\ge$ 0, f'(x) = $e^x$ - 1. Or x $\ge$ 0, donc $e^x \ge 1$ ( car la fonction exp est croissante ),
D'où f'(x) $\ge$ 0 et f est une fonction croissante [0 ; + $\infty$[.
Par conséquent, si x $\ge$ 0, f(x) $\ge$ f(0), soit $e^x$ - x $\ge$ 1.
Ainsi pour tout x $\ge$ 0, $e^x \ge x + 1$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$.

2) En posant X = -x, on obtient l'autre limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-X} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$

## 5° Formes indéterminées

Il y a trois formules de formes indéterminées à connaître :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$

## 6° Fonction eu , où u est une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive : $\boxed{(\exp u)' = u'.\exp u}$

**Exemple :**
Soit f(x)= $e^{-3x^2}$ . Ici, u(x)=-3x² et u'(x)=-6x
Donc f'(x)=-6x $e^{-3x^2}$ .

# II. Fonction logarithme

## 1° Fonction logarithme népérien

### a - Définition

On sait que la fonction exponentielle réalise une bijection de ℝ sur $]0;+\infty[$ .

Autrement dit, pour tout $k \in ]0;+\infty[$ , l'équation $e^x = k$ admet une solution unique dans ℝ.

Cette solution est appelée logarithme népérien de k, et noté ln(k). Autrement dit :

La fonction **logarithme népérien**, notée **ln** est la fonction qui à tout réel $x$>0 associe le réel ln($x$) dont l'exponentielle est $x$. Elle est donc définie sur $]0,+\infty[$.
Autrement dit, pour x >0, exp(ln(x)) = x, et pour tout x réel, ln(exp(x))=x

ln(1)=0 car $e^0$=1 et ln(e)=1 car $e^1$=$e$.

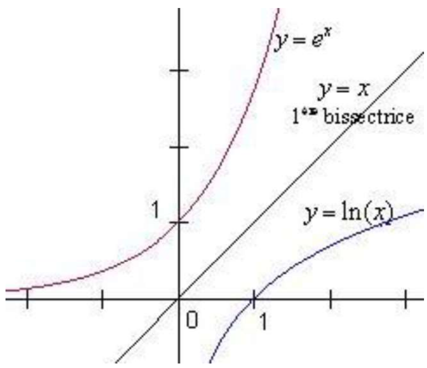
Remarque : La fonction **logarithme népérien** est définie sur $]0,+\infty[$. Il ne faut pas prendre le logarithme d'un nombre sans vérifier au préalable qu'il est **strictement positif.**

### b - Liens avec la fonction exponentielle

On a l'équivalence :

$$\begin{cases} y = e^x \\ y > 0, x \text{ réel} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0, x \text{ réel} \end{cases}$$

Autrement dit, les courbes représentatives $C_f$ et $C_g$des fonctions $f$ : $x \mapsto \ln(x)$ et $g$ : $x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y$=$x$



On dit que la fonction ln est la **bijection réciproque** définie sur $]0,+\infty[$ de la fonction exp.

### c - Propriétés algébriques

Pour tous réels a > 0 et b > 0 et pour tout entier relatif p, on a :

Equation fonctionnelle : Pour tous réels a et b, on a $\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)$

| | |
|---|---|
| $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$ | $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ |
| $\ln(a^p) = p\times\ln(a)$ | $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ |

### d - Etude du logarithme népérien

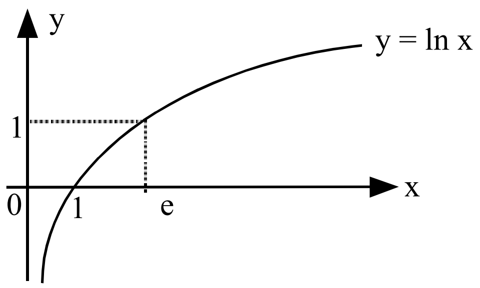
La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de fonction dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ donc la fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.

$\ln(x) < 0$ si $x < 1$ et $\ln(x) > 0$ si $x > 1$

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ et $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$

| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | | + | | |
| $\ln(x)$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |




Il y a trois formules de formes indéterminées à connaître :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \ln'(1) = 1$

### f - Fonction ln(u), où u est une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive alors : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

## 2° Fonction logarithme décimal

On appelle **logarithme décimale** la fonction log, définie sur ] 0 ; $+\infty$ [ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

**Exemple :**

Log (1) = $\frac{\ln(1)}{\ln(10)}$ , $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$ , $\log(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(10)} =$

**Propriété :**

- La fonction log est strictement croissante et dérivable sur $]0;+\infty[$ .
- La fonction log possède les mêmes propriétés que la fonction ln à savoir :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \quad \log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n\log(a) \quad \log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)$$

- Pour tout x$\in R$ , $\log(10^x) = x$ .

# Chapitre IV : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

## I. PARITE ET PERIODICITE

### 1° Définitions

Soit f une fonction et $D_f$ son ensemble de définition.
1) f est une **fonction paire** si pour tout x dans $D_f$, - x est dans $D_f$ et **f(-x) = f(x)**.
2) f est une **fonction impaire** si pour tout x dans $D_f$, - x est dans $D_f$ et **f(-x) = - f(x)**.
3) f est une **fonction périodique de période T** si pour tout x dans $D_f$, x + T est dans $D_f$ et **f( x + T ) = f (x)**.

### 2° Conséquences graphiques

1) La représentation graphique d'une **fonction paire** admet l'axe des ordonnées **comme axe de symétrie**,
2) la représentation d'une **fonction impaire** admet l'origine du repère comme **centre de symétrie**.

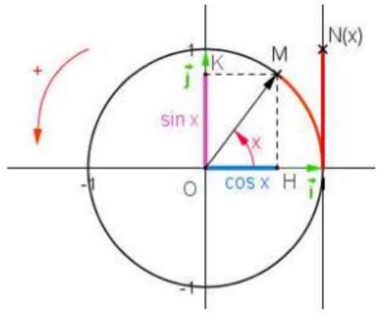
**Exemples :**
1) La fonction carrée ( $x \to x^2$ ) est une fonction paire car $(-x)^2 = x^2$.
2) La fonction inverse ( $x \to \frac{1}{x}$ ) est une fonction impaire car $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$.
3) La fonction tangente est périodique de période $\pi$ car en effet :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} = \frac{\sin x \times (-1) + 0}{\cos x \times (-1) + 0} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan(x)$$

## II. PROPRIETES DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

### 1° Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;i ; j ) et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
L'enroulement de cette droite autour du cercle fait correspondre à ce point, un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.
On définit cos(x)=OH et sin(x)=OK.




**Remarque :**
Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur R.

## 2° Parité des fonctions sinus et cosinus

1) Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire donc sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
2) Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est impaire donc sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

## 3° Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période $2\pi$.

**Conséquence sur l'intervalle d'étude :**
Ces deux propriétés nous permettent de réduire l'intervalle d'étude des fonctions sinus et cosinus à [0 ; $\pi$]. Par parité et en utilisant les éléments de symétrie, on obtient les résultats sur [-$\pi$; 0]. Par périodicité, on obtient par translation, la courbe de ces deux fonctions sur R.

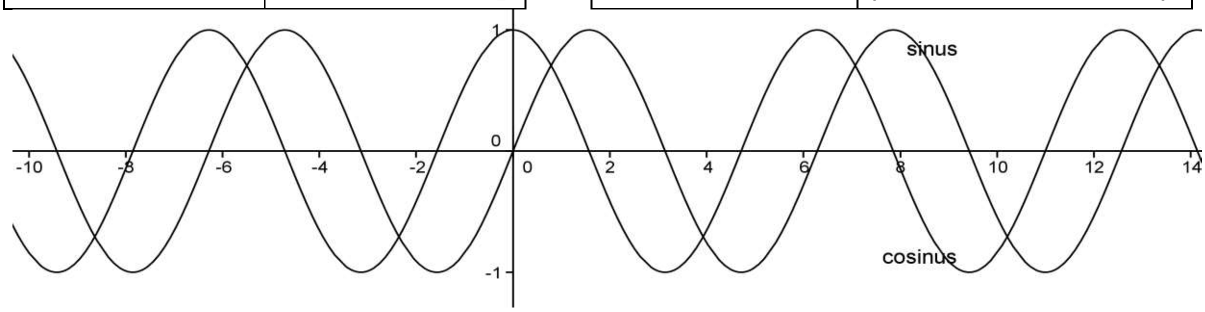
## 4° Dérivées et signes

Les fonctions cosinus et sinus sont continues et dérivables sur R.
Pour tout x dans R, ( cos x )' = -sinx et (sin x )' = cos x.

**Tableau de variations des fonctions sinus et cosinus :**

| | 0 | $\pi$ |
|---|---|---|
| | 1 ↘ | -1 |

| | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| | 0 ↗ | 1 | ↘ 0 |



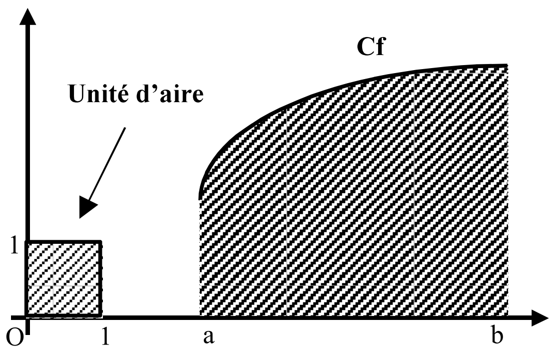
# Chapitre V : INTEGRALES ET PRIMITIVES

## I. INTEGRALES

### 1° Fonction continue positive

#### a - Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [ a ; b ] avec a $\leq$ b. Dans un repère orthonormal, **l'intégrale de a à b** de la fonction f correspond à l'aire (en unité d'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.




**L'intégrale(ou somme)de a à b de f** est notée : $\int_a^b f(x)dx$ .

- a et b sont appelés les bornes d'intégration.

- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ .

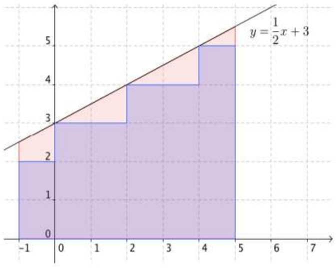
"dx " ou "dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

#### b - Exemple de calcul d'une aire

$$A = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \times (2\times 3\ cm^2) = \left(6 \int_a^b f(x)dx\right) cm^2$$

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par f (x) = $\frac{1}{2}$ x + 3 dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ f (x)dx a)




b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = −1et x = 5.

On calcule les aires des 4 rectangles : 1x2=2ua, 2x3=6 ua, 2x4=8ua et 1x5=5 ua.

Donc par dénombrement, on obtient $\int_{-1}^{5} f(x)dx \approx 2 + 6 + 8 + 5 = 21$ ua.

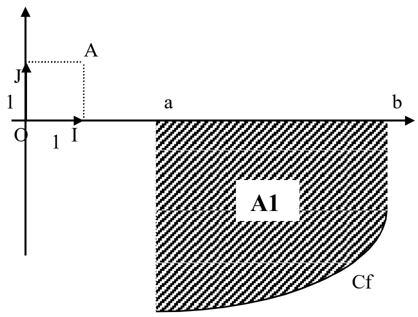
## 2° Fonction continue de signe quelconque

### a - Fonction de signe négatif

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle [ a ; b ] avec a $\leq$ b .

On appelle intégrale de a à b le réel :

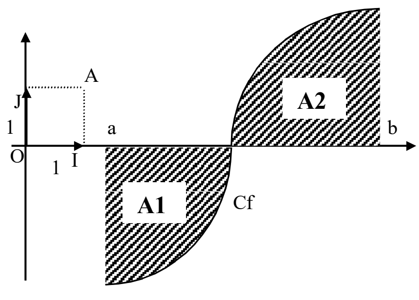
$$\int_a^b f(x)dx = - \text{Aire du domaine A1.}$$




### b - Fonction de signe quelconque

Soit f une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle [ a ; b ] avec a $\leq$ b .
On appelle intégrale de a à b le réel :

$$\int_a^b f(x)dx = - \text{Aire du domaine A1} + \text{Aire du domaine A2.}$$




### c - Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle [ a ; b ] avec a <b

Il existe un réel c entre a et b tel que : $\int_a^b f(x)dx = (b - a) \times f(c)$ .

On appelle **valeur moyenne de f sur [a,b]** le réel $\mu$ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

## 3° Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a, b et c trois réels de I.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

### a - **Propriétés algébriques**

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Si f est **paire**, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Si f est **impaire**, alors : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Si f est **périodique de période T** sur ℝ, alors : $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

### b - **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

### c - **Linéarité de l'intégrale**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels.

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

### d - **Positivité de l'intégrale**

Si pour tout x de [ a , b ] : $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

### e - **Intégration d'une inégalité**

Si pour tout x de [ a , b ] : $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

### 4° Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de [ a , b ], on ait :
$m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

S'il existe un réel M tel que pour tout x de [ a , b ], on ait :
$|f(x)| \leq M$ alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M \times (b - a)$

**Exemple :**
On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)dx = \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16} = \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{14}\times 16^4\right) = \frac{16^3}{12} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.

## II. PRIMITIVES

### 1° Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction **F** dérivable sur I, telle que pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x).$$

**Exemple :** Une primitive sur ℝ de la fonction $f : x \rightarrow x^3$ est la fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{4}x^4$.

### 2° Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur I admettant F comme primitive sur I, alors **f admet une infinité de primitives**.
Les autres primitives de f sur I sont définies par $\mathbf{G : x \rightarrow F(x) + k}$ où k est une constante réelle.

Soient f une fonction admettant des primitives sur I, $x_0$ un élément de I et $y_0$ un réel. Il existe une **unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$.**

## 3° Primitives d'une fonction continue

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel de I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f telle que $F(a) = 0$ .

## 4° Primitives de fonctions usuelles

Soit k un réel.

| **Fonction** | **Primitives** | **Commentaires** |
|---|---|---|
| a ( a constante réelle ) | $a x + k$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ ( n entier relatif, $n \neq -1$) | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ | sur $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$<br>sur $]-\infty\ ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$ si $n < -1$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(x) + k$ | sur $]0 ; +\infty[$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + k$ | sur $]0 ; +\infty[$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + k$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $\sin x + k$ | sur $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x + k$ | sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + q\pi\}$, q entier relatif |
| $e^x$ | $e^x + k$ | sur $\mathbb{R}$ |

## 5° Linéarité des primitives

**Propriété :**
Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b].
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur [a ; b] alors :
- F + G est une primitive de f + g ,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

### 6° Opérations algébriques

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

| Fonction | Une primitive | Commentaires |
|---|---|---|
| $a u'$ ( a réel ) | $a u$ | |
| $u' + v'$ | $u + v$ | |
| $u'u^n$ ( n entier relatif, $n \neq -1$ ) | $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ | sur tout intervalle où $u(x) \neq 0$ si $n < -1$ |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(u)$ si $u(x) > 0$ <br> $\ln(-u)$ si $u(x) < 0$ | |
| $u' e^u$ | $e^u$ | |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | sur tout intervalle où $u(x) > 0$ |
| $u'(ax+b)$ $a \neq 0$ | $\frac{u(ax+b)}{a}$ | |
| $u' \times (v' \circ u)$ | $v \circ u$ | |

## III. CALCUL D'INTEGRALES

### 1° Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b \text{ (notation) où F est une primitive de f sur I.}$$

**Exemple :** $\int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$.

### 2° Calcul d'aires

Soient f et g deux fonctions continues sur I. Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
Si $f \leq g$ sur I alors l'aire A ( en unités d'aire) de la surface du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, la courbe représentative de la fonction g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$A = \left(\int_a^b (g(x) - f(x))dx\right) \text{ en unités d'aire.}$$

# Chapitre VI : SUITES NUMERIQUES

# I. GENERALITES

## 1° Suite de nombres

Intuitivement, une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Cela signifie que, parmi ces nombres il y a un premier terme, puis un deuxième, un troisième etc...

Généralement, on note $u_0$ le premier terme de la suite, puis $u_1$ le deuxième, $u_2$ le troisième... **Le $n^{ième}$ terme est donc $u_{n-1}$ .**

**Si le premier terme est $u_1$, le $n^{ième}$ terme sera donc $u_n$ .**

Une suite est notée conventionnellement **($u_n$)**.Construire une suite **($u_n$)**, c'est associer à chaque entier naturel n un nombre réel noté $u_n$ . Ce nombre est appelé **terme d'indice n de la suite ($u_n$) ou se lit « u indice n »**.

## 2° Modes de définition d'une suite

### a - Suites définies explicitement

Une suite est définie explicitement si pour un n donné, on peut calculer directement la valeur de $u_n$.

**Exemples :**

- La suite ($u_n$) définie par : $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3$.

On obtient donc : $U_n = n^2 + 3$.

- La suite ($v_n$) définie par : $v_n = (-1)^n$

### b - Suites définies par récurrence

Une suite est dite définie par récurrence lorsque chaque terme est calculé en fonction du ou des précédents. Elle est alors définie par le ou les premiers termes et une formule permettant de calculer un terme en fonction des précédents.

**Exemples :** $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ , $\begin{cases} u_0 = 3 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} \end{cases}$.

$u_1 = 2xu_0-3 = 2x5-3=7$

$u_2=2xu_1-3=2x7-3=11$

$u_3=2xu_2-3=2x11-3=19$

## 3° Suites arithmétiques et géométriques

Parmi l'infinité des suites que l'on peut construire, nous nous intéressons particulièrement aux suites arithmétiques et géométriques.

| | **Suite arithmétique de raison r** | **Suite géométrique de raison q** |
|---|---|---|
| **Relation de récurrence** | $u_{n+1} = u_n + r$ | $u_{n+1} = q \times u_n$ |
| **Formule explicite** | $u_n = r \times n + u_0$ | $u_n = u_0 \times q^n$ |
| **Relation entre $u_n$ et $u_p$** ( n et p entiers ) | $u_n = u_p + (n - p)\, r$ | $u_n = u_p \times q^{n-p}$ |
| **Somme de N termes consécutifs** | $N \times \dfrac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$ | $1^{er}$ terme $\times \dfrac{(1-q^N)}{(1-q)}$ <br> $(q \neq 1)$ |

## 4° Sens de variation

Soit $( u_n )$ une suite de nombres réels.

### a - Suites monotones

Si pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $( u_n )$ est **croissante**.

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $( u_n )$ est **décroissante**.

$u_{n+1} = u_n$ alors $( u_n )$ est **constante** ou **stationnaire** .

**( $u_n$ ) est** monotone **si elle est** croissante **ou si elle est** décroissante

**Remarque :** Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

**Exemple :** $u_n = (-1)^n$

### b - Suites strictement monotones

Si pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n > 0$ alors $( u_n )$ est **strictement croissante**.

$u_{n+1} - u_n < 0$ alors $( u_n )$ est **strictement décroissante**.

$( u_n )$ est **strictement monotone** si elle est strictement **croissante** ou **décroissante**.

### c - Suites périodiques, majorées, minorées et bornées

S'il existe des réels M, m et p $(p > 0)$ tels que pour tout entier n :

$u_{n+p} = u_n$ alors $( u_n )$ est **périodique de période p**.

$u_n \leq M$ alors $( u_n )$ est **majorée (M est un majorant)**.

| | | |
|---|---|---|
| $u_n \geq m$ | alors | $(u_n)$ est **minorée (m est un minorant)**. |
| $m \leq u_n \leq M$ | alors | $(u_n)$ est **bornée (majorée et minorée).** |

# II. RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

## 1° Principe

Le raisonnement par récurrence est un procédé utile pour démontrer qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel $n_0$ donné.

Le procédé se décompose en trois étapes :

**1- Initialisation : Vérifier** que la propriété P est vraie .au rang $n_0$

**2- Hérédité : Supposer** que P est vraie au rang k tel que $k \geq n_0$ et démontrer alors que la propriété P est vraie au rang $k_{+1}$.

**3- Conclusion : Conclure** que P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à un entier naturel $n_0$.

## 2° Exemple

Montrer que la propriété $P_n$: $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

**1-Initialisation :** Etudions si P est vraie au rang 1: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ . Donc **Pest vraie au rang 1**.

**2- Hérédité :** Supposons que P soit vraie. Au rang k, pour $k \geq 1$, Donc l'hypothèse de récurrence est : $1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$

On démontre que pour l'entier **suivant k + 1**, la propriété est encore vraie :

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $1 + 2 + .. + k = \frac{k(k+1)}{2}$,

Donc : $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

**3-** Conclusion : La propriété P est vraie **pour tout entier n** supérieur ou égal à 1.

# III. LIMITES ET CONVERGENCE

## 1° Définitions

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels et a un nombre réel.

On dit que **$(u_n)$ converge vers la limite réelle a** si tout intervalle ouvert de centre a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

La suite **$(u_n)$ a pour limite** $+\infty$ (ou $-\infty$) si tout intervalle ouvert du type $]\, a ; +\infty\, [$ ( ou $]\, -\infty$ **;** $a\, [$ ) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

La suite **diverge** si elle ne converge pas.

**Remarque :** Dans le cas où une suite diverge, elle peut avoir soit une limite infinie soit ne pas avoir de limite (par exemple, la suite $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers l'infini , donc elle diverge)

## 2° Opérations et théorèmes de comparaison

### a - Opérations sur les limites

Les théorèmes sur la limite d'une somme ( $u_n + v_n$ ), d'un produit ($u_n \times v_n$ ) et d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ de suites sont les mêmes que les théorèmes sur les limites de fonctions. On peut se référer au chapitre I de ce polycopié.

### b - Théorèmes de comparaison

Soient $(u_n)$, $(v_n)$, $(x_n)$ et $(y_n)$ quatre suites de nombres réels.

| **Si à partir d'un certain rang …** | **Et si …** | **Alors …** |
|---|---|---|
| $u_n \leq x_n$ | $(u_n)$ tend vers $+\infty$ | $(x_n)$ tend vers $+\infty$ |
| $x_n \leq u_n$ | $(u_n)$ tend vers $-\infty$ | $(x_n)$ tend vers $-\infty$ |
| $\lvert x_n - \ell \rvert \leq u_n$ | $(u_n)$ tend vers 0 | $(x_n)$ tend vers $\ell$ |
| $u_n \leq x_n \leq v_n$ | $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite $\ell$ | $(x_n)$ converge vers $\ell$ **(théorème des gendarmes)** |
| $x_n \leq y_n$ | $(x_n)$ et $(y_n)$ sont convergentes | $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ |

## 3° Suites arithmétiques et géométriques

### a - Suites arithmétiques

Soit la suite arithmétique $(u_n)$ définie par : $u_{n+1} = u_n + r$ .

- Si $r > 0$ alors $(u_n)$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors $(u_n)$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- - Si $r = 0$ alors $(u_n)$ est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

### b - Suites géométriques

Soit q un nombre réel. Soit une suite géométrique $(u_n)$ définie par : $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ .

- Si $q = 1$ alors $(u_n)$ a pour limite 1 .
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors $(q^n)$ est divergente et n'a pas de limite.

## 4° Suites monotones

**Toute suite croissante et majorée est convergente.**

**Toute suite décroissante et minorée est convergente.**

**Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$**

**Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$**

## 5° Suites de type $u_n = f(n)$

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$, a réel .
Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, alors la suite $(u_n)$ admet la même limite.

**<u>Exemple</u> :** $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Pour tout entier n non nul, on a : $u_n = f(n)$, avec f : $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Toutes les formules de limites pour des fonctions vues dans les chapitres précédents sont ainsi valables pour les suites.

**<u>Exemples :</u>**

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$, a nombre réel tel que $a > 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, $\alpha$ nombre réel tel que $\alpha > 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$, $a > 1$ et $\alpha > 0$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty$, $\alpha > 0$.

## 6° Suites de type $u_n = f(v_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)$ une suite de points de I.

Si la suite ($u_n$) admet une limite a (finie ou infinie) et si la fonction f admet en a une limite $\ell$ (finie ou infinie) alors la suite $\left(f(u_n)\right)$ admet $\ell$ pour limite.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f(u_n)\right) = \ell$.

**Exemple** : Soit la suite ( $v_n$ ) définie par $v_n = \sqrt{\dfrac{5n+3}{2n-9}}$ . $v_n$ est définie pour n ≥ 5 .

Posons : $u_n = \dfrac{5n+3}{2n-9}$, $n \geq 5$ ; on a donc $v_n = \sqrt{u_n}$ . Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}} \sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ . Donc,

l'image ( $v_n$ ) de la suite ( $u_n$ ) par la fonction $x \to \sqrt{x}$ converge vers $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ .

## 7° Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de ℝ telle que f ( I ) ⊂ I (on dit que I est stable par f).
Soit a un nombre réel de I. On construit ainsi une suite ( $u_n$ ) de points de I que l'on note de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a, a \in I & \textit{(condition initiale)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier n} & \textit{(relation de récurrence)} \end{cases}$$

**Théorème :**

Soit ( $u_n$ ) une suite récurrente définie par $\begin{cases} u_o = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Si f est continue sur I et si ( $u_n$ ) converge vers l ∈ I, alors l est un point fixe de f (c'est-à-dire f(l)=l).

Ce théorème nous dit que si ( $u_n$ ) converge, alors nécessairement elle converge vers un point fixe de f. Pour trouver la limite d'une telle suite, on cherchera donc les points fixes de f.

Proposition :
Si f est croissante de I sur I, alors ( $u_n$ ) est monotone.

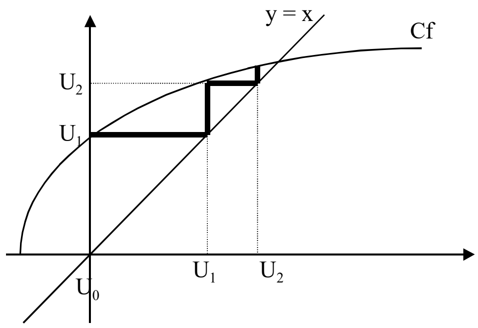
**Exemple :** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, \text{ n entier naturel} \end{cases}$

### 🗁 Tracer la courbe représentative de f

Soit la fonction $f : x \to \sqrt{1+x}$ .
f est définie sur $[0; +\infty[$ (on a bien : $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$).
On trace $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

### 🗁 Placer les points $u_n$

Si $u_n$ est porté sur l'axe des abscisses, la courbe $C_f$ permet d'obtenir la valeur f( $u_n$ ), c'est à dire $u_{n+1}$ sur l'axe des ordonnées. Pour poursuivre le processus, il faut « reporter » $u_{n+1}$ sur l'axe des abscisses, pour cela on utilise la droite d'équation y = x.




### Interprétation graphique

On observe sur la figure que les points $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, ... se rapprochent du point d'intersection de C et de la droite d'équation y = x . On conjecture que la limite de cette suite est le point d'intersection de C et de la droite d'équation y = x .

Pour tout réel $x \geq -1$, $\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow (1 + x = x^2 \text{ et } x \geq 0) \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'intersection de C et de la droite d'équation y = x est le point $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

On conjecture donc que la limite de $(u_n)$ est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$… Ce qui pourra être prouvé par la suite.

# Chapitre VII : PROBABILITES ET LOIS DE PROBABILITE

# I. PROBABILITES

## 1° Généralités

### a - Evénements

Pour une expérience donnée, nous désignerons par E l'ensemble de toutes les issues possibles, appelées **événements élémentaires**. Cet ensemble est souvent appelé « ensemble des possibles ».

Si E est un ensemble d'événements élémentaires, alors :

- Un **événement** A est une partie de E.
- L'**événement** contraire de A, noté $\overline{A}$, est la partie complémentaire de A dans E.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'appartient pas à E (exemple : tirer un 7 au dé).
- On parle d'**événements incompatibles** s'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps.

***Exemple* :**
On jette un dé à six face. L'ensemble des possibles est
$E = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.
Soit A l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ».
$A = \{ 5 ; 6 \}$
Le contraire de A est $\overline{A} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$.

### b - Définition des probabilités

Si à chaque événement A on associe un nombre noté p(A) ayant les 3 propriétés suivantes, alors ces nombres sont appelés des **probabilités** :

**P1 :** Pour tout événement A, sa probabilité est comprise entre 0 et 1. $0 \leq p(A) \leq 1$
**P2 :** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.
**P3 :** La somme des probabilités de deux éléments contraires est égale à 1 : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

### c - Propriétés des probabilités

Si E est l'ensemble des événements élémentaires : $p(E) = 1$.
Soit $\varnothing$ l'ensemble vide : $p(\varnothing) = 0$.

Soit deux événements A et B quelconques : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Pour deux événements incompatibles, on a : $p(A \cap B) = 0$ **et** $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

### d - Equiprobabilité

Pour une situation donnée, il y a **équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, pour un événement A quelconque, on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}}$$

**Exemple :** On lance un dé. Quelle est la probabilité de tomber sur le chiffre 1 ?

E = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } donc $p(A) = \frac{1}{6}$.

## 2° Variables aléatoires

### a - Définitions

Pour une expérience donnée, on appelle E l'ensemble fini de toutes les issues possibles .

On appelle **variable aléatoire réelle X** une fonction définie sur l'univers des possibles E à valeurs réelles.
L'**univers image** de E par la variable X est l'ensemble : $X(E) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Les $x_i$ sont les valeurs que peut prendre la variable X.
La **loi de probabilité** de la variable X est la fonction qui à chaque $x_i$ de X associe sa probabilité $P(X = x_i)$ ou $p_i$.

**Exemple :** X peut représenter le nombre de 5 apparaissant à chaque tirage de 6 dés. Il peut y avoir : 0,1, 2, 3, 4, 5 ou 6 nombres 5 qui apparaissent donc X(E) = {0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}.
Définir la loi de probabilité, c'est donner P(X=0) P(X=1), P(X=2), P(X=3), P(X=4), P(X=5) et P(X=6). Par exemple, P(X=1) correspond à la probabilité qu'apparaisse un seul 5 lors d'un tirage de 6 dés.

### b - Espérance mathématique

Soit X la variable aléatoire de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ ayant comme probabilités $p_1, \ldots, p_n$.

L'**espérance mathématique** de X est le réel E(X) tel que :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

E(X) est la moyenne des valeurs $x_i$, pondérées par les valeurs $p_i$.

**Remarque :**
Dans le domaine des jeux, E(X) correspond au gain moyen que l'on peut espérer gagner (d'où le terme « espérance »).

Si E(X) = 0 alors le jeu est équitable.
Si E(X) > 0 alors le jeu nous est favorable.
Si E(X) < 0 alors le jeu nous est défavorable.

### c - Variance et écart type

La **variance mathématique** de la variable aléatoire X est le réel V(X) donnée par la formule suivante :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}(p_i x_i^2) - E(X)^2$$

L'**écart type** est la racine carrée de la variance.

On le note $\sigma$ : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

On peut calculer plus rapidement la variance grâce à la formule suivante :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

### d - Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart type

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur la même situation

Soient a et b des réels.

| | | |
|---|---|---|
| $E(X + b) = E(X) + b$ | $E(aX) = a\,E(X)$ | $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ |
| $V(X + b) = V(X)$ | $V(aX) = a^2\,V(X)$ | |
| $\sigma(X + b) = \sigma(X)$ | $\sigma(aX) = \lvert a \rvert \sigma(X)$ | |

## 3° Probabilités conditionnelles

### a - Définition

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire avec $p(B) \neq 0$.

On définit la **probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé**, notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$, par la relation : $p_B(A) = p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

### b - Arbre pondéré

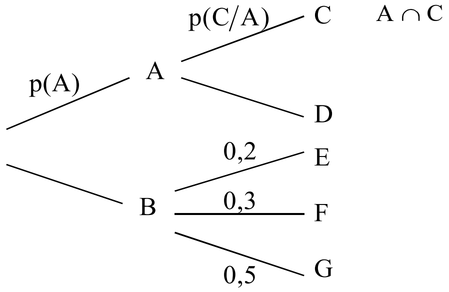
On peut représenter une situation par un arbre pondéré. La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

**Règle des nœuds** : la somme des probabilités affectées aux branches qui partent d'un même nœud est égale à 1.

**Exemple**

En suivant le chemin qui mène à C, on retrouve la formule : $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C)$.

Sur les branches qui mènent de B à E, F et G, on a bien : 0,2 + 0,3 + 0 5 = 1.



#### c - Formule des probabilités totales

Si $B_1$, $B_2$, ... , $B_n$ forment une partition de E, alors quel que soit l'événement A, $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ... , $A \cap B_n$ forment une partition de A. Ainsi :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + ... + p(A \cap B_n)$$

L'intérêt de cette remarque réside dans le fait que les probabilités $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, …, $A \cap B_n$ peuvent être calculées grâce aux probabilités conditionnelles :
$p(A \cap B_1) = p_{B_1}(A) \times p(B_1)$.
La **formule des probabilités totales** s'écrit ainsi :

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

### 4° Indépendance

#### a - Evénements indépendants

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
On peut aussi dire : $p(A) = p_B(A)$ et $p(B) = p_A(B)$.

**ATTENTION !**

Ne pas confondre événements *indépendants* ( $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ) et événements *incompatibles* ($p(A \cap B) = 0$ ).

**Exemple :**
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement "On tire un roi", soit T l'événement "On tire un trèfle".
Alors R ∩ T est l'événement "On tire le roi de trèfle".
On a :

$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$.
Les événements R et T sont donc indépendants.
Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

#### b - Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers E d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et Y les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_m$.
On peut définir une **loi de probabilité du couple (X,Y)** en donnant la probabilité $p_{i,j}$ de chaque événement [$(X=x_i)$ et $(Y=y_i)$].

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tous i et j ( $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ ), les évènements ( $X = x_i$ ) et ( $Y = y_i$ ) sont indépendants c'est à dire : $p_{i,j} = p_i \times p_j$.

# II. LOIS DE PROBABILITE

## 1° Lois discrètes

### a - Epreuve de Bernoulli

Une épreuve aléatoire possédant deux issues S et E de probabilité p et q telles que : q = 1-p , est appelée « **épreuve de Bernoulli** ».

**Exemple :** Prenons un dé non pipé, lancé cinq fois de suite. Appelons « succès » l'événement noté S : « le six sort ».
Le lancer de dé peut être considéré comme une expérience aléatoire ayant deux issues : « succès S » de probabilité $p = \frac{1}{6}$ et « échec E » de probabilité $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

### b - Loi de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli d'issues S (comme succès) de probabilité p et E (comme échec) de probabilité q.

**La loi de Bernoulli de paramètre p** est la loi de probabilité de la variable aléatoire X à valeurs dans {0,1} telle que X(S)=1 et X(E)=0.On a ainsi : $p(X=1) = p$ et $p(X=0) = q$.

Par ailleurs : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$

### c - Loi Binomiale

On obtient un **schéma de Bernoulli** en répétant de façon indépendante n épreuves de Bernoulli d'issues **S** de probabilité p et **E** de probabilité q ( avec p + q = 1).

**La loi binomiale de paramètres n et p** est la loi de probabilité de la variable aléatoire X à valeurs dans { 0 , 1 , 2 , … , n } telle que X soit le nombre d'issues S (nombre de succès) réalisées lors du schéma.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée B(n,p), alors :

- Pour tout k appartenant à {0,1,2,….,n} : $p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
- L'espérance et la variance sont alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

**Exemple :** La probabilité d'avoir 3 succès sur 8 expériences est : $p(X=3) = \binom{8}{3} p^3 q^5$.

## 2° Lois de probabilité continues

Dans le paragraphe précédent, on parlait de **loi de probabilité discrète** car la variable aléatoire **X** ne pouvait prendre qu'un **nombre fini de valeurs** : $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Dans ce paragraphe, nous parlons de **loi de probabilité continue** car la variable aléatoire **X** peut prendre toutes les valeurs appartenant à **un intervalle** (borné ou non)de $\mathbb{R}$.

**Exemple :** La variable aléatoire qui donne la durée de vie d'un objet (ampoule, composant électronique,…).

### a - Densité d'une loi de probabilité

Pour décrire une loi de probabilité discrète, il suffisait de donner la probabilité $p_i$ de chaque événement ($X = x_i$). Pour une loi de probabilité continue, on ne peut pas faire de même car il faudrait définir une infinité de probabilités.

On appelle **densité d'une loi de probabilité P**, une fonction f définie, continue, positive sur un intervalle [ a , b ] de ℝ telle que : $\int_a^b f(t)dt = 1$.
Pour tout intervalle [ α ; β ] contenu dans [ a , b ], **la probabilité de l'intervalle [ α ; β ]** est la probabilité que $x \in [\alpha ; \beta]$ et est définie par : $P([\alpha ; \beta]) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$ .

### b - Espérance d'une variable aléatoire continue

L'espérance d'une variable aléatoire X à densité f définie sur[a ;b] est définie par :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$$

### c - Loi uniforme

Une loi de probabilité P est **une loi uniforme** sur un intervalle [ a , b ] de ℝsi sa densité **f est une fonction constante** sur [ a , b ] .

On montre aisément que cette fonction constante est la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ .

Pour tout intervalle [ α ; β ] contenu dans [ a , b ], la probabilité de l'intervalle[ α ; β ] est définie par : $P([\alpha ; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

### d - Loi exponentielle

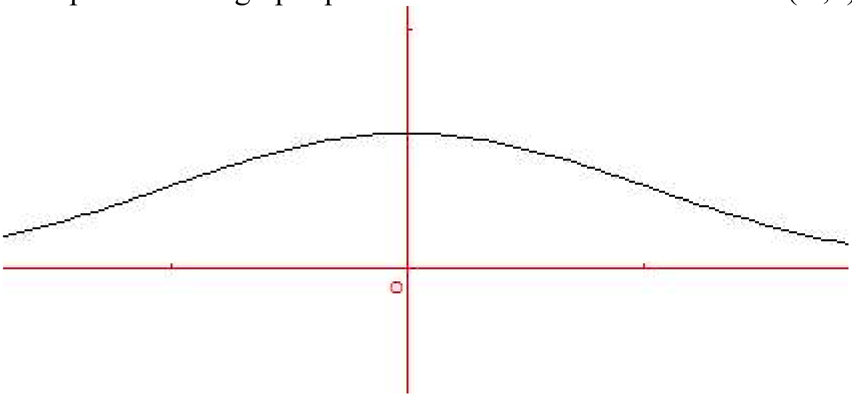
Une loi de probabilité P est **une loi exponentielle de paramètre le réel** $\lambda > 0$ si sa densité **f est une fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [** par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

Pour tout intervalle [ α ; β ]contenu dans [ 0 ; + ∞ [ , la probabilité de l'intervalle[ α ; β ] est définie par : $P([\alpha , \beta]) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$

# Chapitre VIII : LOI NORMALE ET ESTIMATION

## I. LA LOI NORMALE

**Définition :**
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite notée N(0 ; 1) si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi N(0 ;1) est appelée courbe en cloche :




On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale noté N( $\mu;\sigma^2$ ) si la variable aléatoire T = $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
**Contexte d'utilisation :** Taille d'un individu, fréquence cardiaque, quotient intellectuel ..

**Propriétés :**
Soit f la fonction densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite.
Cette fonction étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, cela entraine :
$P(X \in [0;+\infty[) = P(X \in ]-\infty;0]) = 0,5$
$P(X < -u) = P(X > u)$
$P(X > -u) = 1 - P(X < u)$

**Espérance et variance :**
Si X suit N (0 ; 1 ) alors E(X) = 0 et V(X) = 1.
Si Y suit N( $\mu;\sigma^2$ ) alors E(Y) = $\mu$ et V(Y) = $\sigma^2$ .

**Propriété :**
Si X désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N(0 ;1), alors pour tout nombre réel $\alpha$ appartenant à l'intervalle ]0 ; 1[, il existe un unique réel
u EMBED Equation.3 tel que :
P(−u EMBED Equation.3 ≤ X ≤ u EMBED Equation.3 ) = 1 − $\alpha$ ou
P(−u EMBED Equation.3 ≤ X ≤ u EMBED Equation.3 ) = 1 − EMBED Equation.3

**Valeurs à connaître ;**
Si X suit une loi normale centrée et réduite, alors :

$u_{0,05} = 1{,}96$ , P ( - 1,96 ≤ X ≤ 1,96 ) = 0,95 u EMBED Equation.3 = 1,96 $\alpha = 0{,}05$
$u_{0,01} = 2{,}58$ , P ( - 2,58 ≤ $X$ ≤ 2,58 ) = 0,99 u EMBED Equation.3 = 2,58 $\alpha = 0{,}01$

Si Y suit une loi normale N( $\mu;\sigma^2$ ) , alors
P ( $\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma$ ) ≈ 0,68. P ( $\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma$ ) ≈ 0,95
P ( $\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma$ ) ≈ 0,997 .

(Ces résultats peuvent être obtenus à l'aide d'une calculatrice).

**Théorème de Moivre-Laplace :**
n est un entier naturel non nul et p $\in$ ]0 ;1[.
Soit $X_n$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale B(n,p)
Soit $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ la variable centrée réduite associée à $X_n$

Alors pour tous réels a et b tels que a<b, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

**Remarque :**
Ce théorème traduit le fait que lorsque n est grand, la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approchée pas une probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite.

# II. FLUCTUATION D'ECHANTILLONNAGE ET PRISE DE DECISION

**Définition :**
Soit $X_n$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale B(n,p). La variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ s'appelle la variable aléatoire fréquence de succès pour un schéma de Bernouilli de paramètres n et p.

**Propriété :** Soit α $\in$ ]0 ;1[ et $X_n$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale B(n,p).
La probabilité de la fréquence $F_n$ prenne ses valeurs dans l'intervalle
$I_n = [p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ (avec $u_\alpha$ défini précédemment) se rapproche de 1-α quand la taille de l'échantillon n devient grande.

**Définition :**
On appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire $F_n$, l'intervalle I définie par [ p – 1,96 $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ ; p + 1,96 $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ ].

**Remarques :**
1) Les conditions pour appliquer cet intervalle de confiance sont : n ≥ 30 ; np ≥ 5 et p(1 – p ) ≥ 5.

2) Le nombre 1,96 est relie a 95% de la manière suivant : si Z suit la loi normale centrée et réduite, alors 1,96 est l'unique réel tel que : $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) \approx 0{,}95$.
3) Il est facile de montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % étudié en classe de seconde $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est contenu dans l'intervalle de fluctuation asymptotique note $I_n$.

**Propriété :**

Soit f la fréquence du caractère étudié d'un échantillon de taille n. Soit l'hypothèse : La proportion du caractère dans la population est p. Soit I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95. Si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p, avec une marge d'erreur de 5%. Sinon, on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p.

# III. ESTIMATION

**Définition :**

Soit f une fréquence observée du caractère sur un échantillon de taille n. Lorsque l'entier n vérifie les conditions suivantes : $np \geq 30, np \geq 5$ *et* $n(1-p) \geq 5$, l'intervalle IC = [ $f -$ EMBED Equation.3 $f + \frac{1}{\sqrt{n}}$] est un intervalle de confiance au niveau de 95% pour l'estimation de p.

**Remarque :**

1. On utilise aussi l'intervalle $[ p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ]$, au même niveau de confiance dans certaines disciplines.
2. Supposons que l'on puisse observer $F_n$ de nombreuses fois et notons $f_1, f_2, \ldots, f_N$ ces observations. On remarquerait que 95% des intervalles $[ f_i - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_i + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec $1 \leq i \leq N$

# Chapitre IX : LES NOMBRES COMPLEXES

# I. PRESENTATION DES NOMBRES COMPLEXES

## 1° Définitions

### a - Ensemble ℂ

Il existe un ensemble ℂ contenant ℝ et vérifiant les propriétés suivantes :

- ℂ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans ℝ.
- Il existe un élément i de ℂ tel que : **i² = -1**.
- Tout élément z de ℂ s'écrit de manière unique : **z = a + ib** où a et b sont des réels

**Exemples :** $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -\frac{1}{2}i$

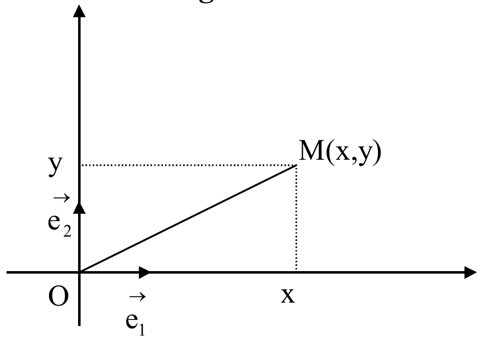
### b - Ecriture algébrique

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est : **z = a + ib** où a et b sont des réels.

- a s'appelle la **partie réelle** de z, notée **Re(z)**.
- b s'appelle la **partie imaginaire** de z, notée **Im(z)**.
- Si b = 0, z est un nombre réel.
- Si a = 0, z est appelé imaginaire pur.

## 2° Représentation géométrique

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ est appelé plan complexe.
z = x + iy (x et y réels) est représenté par le point M(x,y).
On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affixe** du point M.
L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels**
L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.



## 3° Règles de calcul

### a - Egalité de deux nombres complexes

Soient z = a + i b et z' = a' + i b' deux nombres complexes.

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelles **et** la même partie imaginaire.

### b - Somme et produit

Soient z = a + i b et z' = a' + i b' deux nombres complexes :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$
$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

### c - Inverse

Tout nombre complexe non nul z = a + ib (a et b réels) admet un **inverse** z' (c'est à dire un nombre complexe z' tel que zz' = 1), noté $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

### d - Quotient

Soient z = a + ib et z' = a' + ib' deux nombres complexes avec z' non nul. On peut définir le quotient par :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2 + b'^2}$$

ce qui équivaut à la multiplication d'un complexe z par l'inverse d'un autre complexe z'.

## 4° Conjugaison

### a - Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe, z = a + i b (a et b réels).
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté $\bar{z}$ tel que :

$$\bar{z} = a - i\,b$$

**Exemple :** Le conjugué de z = 2 + 3 i est $\bar{z}$ = 2 – 3 i.

#### b - Propriétés

Soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ deux nombres complexes :

Deux nombres complexes égaux ont le même conjugué : $z = z' \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$

Le conjugué de $\overline{z}$ est z : $\overline{(\overline{z})} = z$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

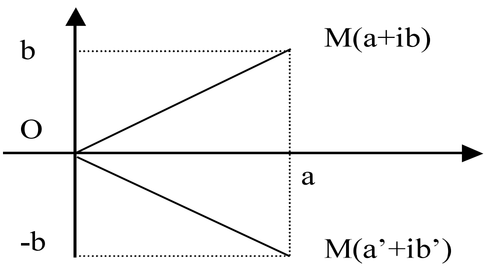
Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$

On a : $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

z imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$ ; z réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$

#### c - Interprétation géométrique




Le point M' d'affixe $z' = a' + i\,b'$ est le symétrique du point M d'affixe $z = a + i\,b$ par rapport à l'axe des abscisses.
Par ailleurs OM = OM'.

# II. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

## 1° Coordonnées polaires

#### a - Définition

Les **coordonnées polaires** d'un point M (distinct de l'origine) du plan $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ sont définies par le couple $(r, \theta)$ tel que :

$$r = OM \text{ et } \theta = (\vec{e_1}; \overrightarrow{OM})$$

#### b - Relations entre cordonnées polaires et cartésiennes

Soit un point M (distinct de l'origine) de coordonnées cartésiennes $(x, y)$ et de coordonnées polaires $(r, \theta)$. Les coordonnés polaires et cartésiennes du point M sont liées par les relations suivantes :

$x = r\cos\theta$ ; $y = r\sin\theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

## 2° Module d'un nombre complexe

### a - Définition

Soit $z = a + i\,b$ (a et b réels) un nombre complexe.

On appelle **module** de z le réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

### b - Propriétés

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Si M(a,b) est l'image de z dans le plan complexe d'origine O, alors : $|z| = OM$.

Si A est un point d'affixe $z_A$ et B un point d'affixe $z_B$, alors $AB = |z_B - z_A|$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ si } z \neq 0$$

## 3° Argument d'un nombre complexe

### a - Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M l'image de z dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On appelle **argument** de z, noté Arg (z), **toute mesure** de l'angle $(\vec{e_1}, \vec{OM})$.
Si $\theta$ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif. Ceci se traduit par l'écriture suivante :

$$\text{Arg}(z) = \theta \text{ modulo } 2\pi \qquad \text{ou} \qquad \text{Arg}(z) = \theta\ (2\pi)$$

**Exemples :** $\text{Arg}(1) = 0\ (2\pi)$ ; $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ; $\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

### b - Propriétés

Tout réel positif a un argument égal à 0 et tout réel négatif a un argument égal à $\pi$.

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ et tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls et pour tout entier n :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi) \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi) \qquad \arg(z^n) = n \times \arg(z)\ (2\pi).$$

Soient a, b et c trois complexes ($c \neq a$ et $c \neq b$), d'images respectives A, B, C, alors :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ modulo } 2\pi$$

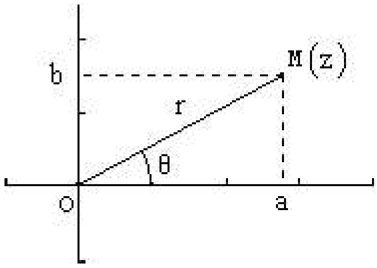
## 4° Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul

Si $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)\ (2\pi)$ alors $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

L'écriture $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ est la forme trigonométrique de z.

Pour $z \neq 0$, on passe de la forme trigonométrique à la forme algébrique de z de la façon suivante : $r = \sqrt{a^2+b^2}$ ; $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ ; $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$




**Remarques :**

- Soient deux nombres complexes $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ et
$z' = r'(\cos(\alpha') + i\sin(\alpha'))$ .

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha'\ (2\pi) \end{cases}$$

- Le complexe z = 0 est de module nul, mais on ne peut pas définir son argument.

## 5° Notation exponentielle

Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ .
Soient deux nombres complexes z et z' tels que $|z| = |z'| = 1$, on a:
$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

Soit $f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta')$
On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles :
$e^{\theta}e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$

**Définition :**

Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
Puis on peut remarquer que son module vaut 1 et que son argument est θ.

### a - Forme générale

Tout nombre complexe z de module r et d'argument $\alpha$ s'écrit sous sa forme exponentielle :
$z = re^{i\alpha}$.

#### b - Propriétés

Les propriétés des modules et des arguments sont cohérentes avec la notation exponentielle.
En effet, on a :

$$r\,e^{i\alpha} \times r'\,e^{i\alpha} = r\,r'\,e^{i(\alpha+\alpha')} \quad ; \quad \frac{r\,e^{i\alpha}}{r'\,e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\alpha-\alpha')} \quad ; \quad \left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha}.$$

### 6° Formules de Moivre et d'Euler

#### a - Formules de Moivre

Pour tout réel $\alpha$ et tout entier n : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$
$(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha)$

#### b - Formule d'Euler

Pour tout réel $\alpha$ : $\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

# III. NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE PLANE

### 1° Affixe

Soient $z_A$ et $z_B$ l'affixe respective des points A et B. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_B - z_A$ .

### 2° Mesure d'un angle orienté

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z'. Alors :

$$|z| = \|\overrightarrow{AB}\| \quad ; \quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ (2\pi)$$

$\dfrac{z'}{z}$ est un **réel** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **colinéaires**

$\dfrac{z'}{z}$ est un **imaginaire pur** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **orthogonaux**

### 3° Ensemble de points

#### a - Cercle

L'ensemble C des points M d'affixe z tels que $|z - a| = r$ , avec r un réel strictement positif et a est un nombre complexe, est le cercle de centre A d'affixe a et de rayon r.

**b - Médiatrice**

L'ensemble $\Delta$ des points M d'affixe z tels que $|z-a| = |z-b|$ , avec a et b affixes respectives des points A et B , est la médiatrice du segment [AB].

# IV. EQUATION DU SECOND DEGRE

## 1° Racine carrée d'un réel a

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$, où a est un réel sont appelés racines carrées de a.

🗁 **$1^{er}$ cas : $a \geq 0$**

L'équation $z^2 = a$ équivaut à $(z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$ .
Donc les racines de a sont les racines réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ .

🗁 **$2^{ème}$ cas : $a < 0$**

L'équation $z^2 = a$ équivaut à $(z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$.
Donc les racines de a sont des nombres complexes imaginaires purs : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ .

## 2° Equation du second degré à coefficients réels

L'équation $ax^2 + bx + c$ (a, b, c réels et $a \neq 0$) admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$. On pourra rappeler que ce n'est pas toujours le cas dans $\Re$ .

Soit $\Delta$ le discriminant de l'équation. $\Delta = b^2 - 4ac$ .

° Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution : $x = \dfrac{-b}{2a}$ (solution réelle).

° Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

- réelles si $\Delta > 0$ : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- complexes conjuguées si $\Delta < 0$ : $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

# Chapitre X : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

## I. POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

### 1° Positions relatives de deux droites

Dans l'espace, deux droites sont soit **coplanaires** ( soit sécantes, soit parallèles ) soit **non coplanaires**.

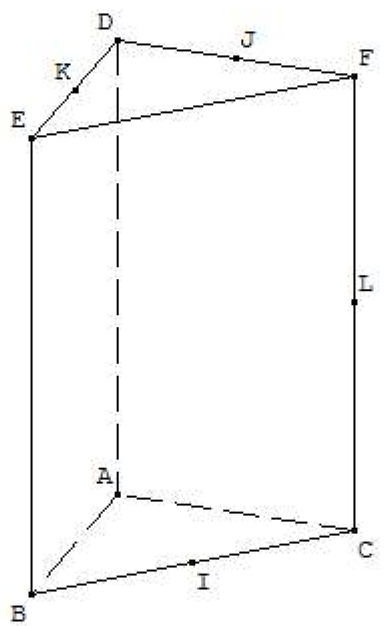
**Définition :**
On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont contenues dans un même plan.

**Exemple1 :**
Dans la figure ci-dessous, ABCDEF est un prisme droit à base triangulaire. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [BC], [BF], [DE] et [FC].

(KJ) est la droite du milieu dans le triangle DEF, elle donc parallèle à (EF). (EF) étant parallèle à (BC), on en déduit donc que **(KJ) et (BC) sont deux droites parallèles donc coplanaires**.

Les droites (KJ) et (DF) sont sécantes en J, elles sont donc coplanaires. Elles définissent le plan (DEF).

Les droites (KJ) et (AD) ne sont ni sécantes, ni parallèles, elles sont dites **non coplanaires**.




### 2° Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite est soit **parallèle à un plan** ( strictement parallèle ou contenue dans ce plan ) soit **sécante à un plan**.

**Exemple2 :**
Dans la figure de l'exemple 1, la droite (KJ) est **strictement parallèle** au plan (ABC). (KJ) est contenue dans le plan (DEF), on dit que (KJ) est **parallèle** à (DEF).
Cependant la droite (AD) est **sécante** au plan (ABC).

**Propriété :**

Une droite qui n'est pas sécante à un plan, est parallèle à ce plan.
Une droite dont deux points distincts appartiennent à un plan est contenue dans ce plan.

### 3° Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit parallèles (strictement parallèles ou confondus ) soit sécants.

**Propriété :**

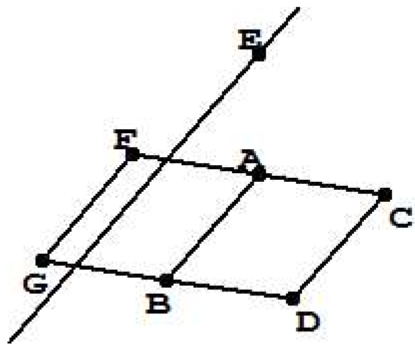
Deux plans distincts ayant un point commun sont sécants et leur intersection est une droite.

## II. DEMONTRER LE PARALLELISME DANS L'ESPACE

### 1° Une droite et un plan

Propriété : Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

La droite (d) passant par le point E est parallèle au plan (ADC) car la droite (AB) est parallèle à (d) et (AB) est contenue dans le plan ADC.




### 2° Deux plans parallèles

Propriété : Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

### 3° le parallélisme de deux droites :

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles

**Théorème du toit** : P1 et P2 sont deux plans sécants.

Si une droite d1 de P1 est parallèle à une droite d2 de P2 alors la droite d'intersection Δ de P1 et P2 est parallèle à d1 et d2.

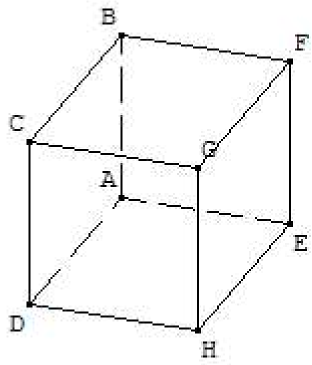
# III. ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Définitions :

1) Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

2) une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (FG) sont orthogonales car la parallèle (BC) à (FG) est perpendiculaire à la droite (AB).




**Remarque :**
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

**Propriété :**

Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

# IV. GEOMETRIE VECTORIELLE

Les opérations sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles sur les vecteurs du plan. On peut étendre toutes les notions et les calculs vus dans le plan à l'espace (Relation de Chasles, …).

## 1° Caractérisation d'une droite ou d'un plan

Comme dans le plan, dans l'espace, une droite est caractérisée par la donnée de deux points distincts ou par la donnée d'un vecteur directeur et d'un point.
Un plan est cependant caractérisé par la donnée de 3 points distincts non alignés ou d'un point et de deux vecteurs directeurs.

**Propriété :**
Soient un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ,non colinéaires. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = x\vec{u}\ \ y\vec{v}$ , avec x∈ℝ et y∈ℝ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

## 2° Vecteurs colinéaires et coplanaires. Quatre points coplanaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si ils sont proportionnels, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\vec{u} = t\,\vec{v}$ .

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres. Autrement dit, ces 3 vecteurs sont **coplanaires** si il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tel que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Quatre points A, B, C et D sont **coplanaires** si ils appartiennent à un même plan autrement dit si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.
Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

# V. REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES

## 1° Représentation paramétrique d'une droite

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées respectives ($x_A$ ; $y_A$ ; $z_A$) et $(\alpha;\beta;\gamma)$ trois réels. Soit une droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M(x,y,z) appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_B + t\beta \\ z = z_B + t\gamma \end{cases}$

Ce système s'appelle la représentation paramétrique de la droite (d)

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_B + t\beta \\ z = z_B + t\gamma \end{cases}$$

### a - <u>Démonstration</u>

Soit (d) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Soit M (x ; y ; z ) un point quelconque du plan.
Le point M appartient à la droite (d) si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha \\ y - y_A = t\beta \\ z - z_A = t\gamma \end{cases} \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

### b - <u>Représentation paramétrique d'un plan</u>

Soit A $(x_A;y_A;z_A)$ un point quelconque d'un plan (P) et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de ce plan. Le point M(x ; y ; z) appartient à (P) si et seulement si il existe deux réels t et t' tel que :

$$\begin{cases} x = at + a't + x_A \\ y = bt + b't + y_A \\ z = ct + c't + z_A \end{cases}$$

### c - Quelques formules

Le point I milieu du segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé est donnée par

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ .

La distance AB **dans un repère orthonormé** est donnée par :

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

# VI. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

## 1° Différentes expressions du produit scalaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, on prend $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir du même point A. Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans l'espace revient à calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$.

Si A, B et C désignent 3 points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. = ABxACxcos(ABAC).

## 2° Propriété du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et réels a et b, on a :

| | |
|---|---|
| $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ | (symétrie du produit scalaire ) |
| $(a\vec{u}+b\vec{v}).\vec{w} = a(\vec{u}.\vec{w})+b(\vec{v}.\vec{w})$ | ( Linéarité du produit scalaire) |

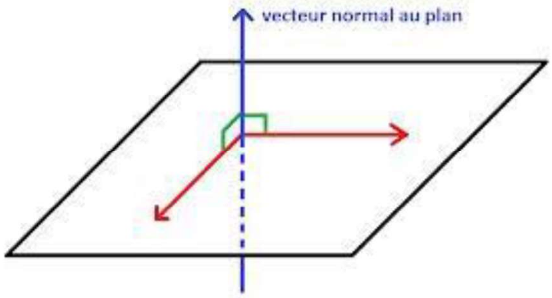
## 3° Orthogonalité

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans un repère **orthonormé,**

alors : $\vec{u}.\vec{v}$=aa'+bb'+cc'

# VII. EQUATIONS CARTESIENNES DANS L'ESPACE

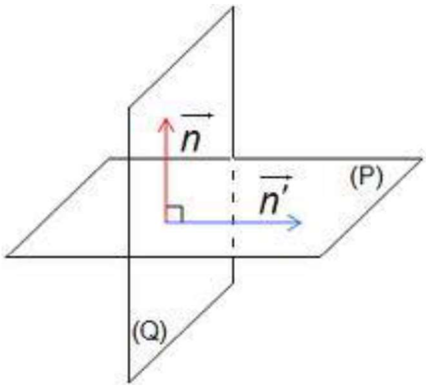
**<u>Définition :</u> ( Vecteur normal à un plan )**
Un vecteur normal à un plan (P) est un vecteur directeur d4une droite orthogonale au plan (P).




**<u>Définition :</u>**

Soient Deux plans (P1) et (P2) de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. (P1) et (P2) sont orthogonaux (perpendiculaires) si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont aussi orthogonaux.

Les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.




Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan (P) lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans (P).

## 1° Equation cartésienne d'un plan

Soit (P) un plan, A ($x_A$ ; $y_A$ ; $z_A$) et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ respectivement un point de (P) et un vecteur normal à (P).

D'après la définition du vecteur normal, un point M(x ; y ; z ) appartient à (P) si et seulement si :
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
On obtient donc : $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$
$Ax+by+cz+d=0$ avec $d=-ax_A-by_A-cz_A$

## 2° Equation cartésienne de l'intersection de deux plans

Soit (P) et (P') deux plans de l'espace d'équation respective ax+by+cz+d=0 et a'x+b'y+c'z+d'=0.
Si les triplets *(a ; b ; c)* et *(a' ; b' ; c')* ne sont pas proportionnels, alors les plans (P) et (P') sont sécants et la droite d'intersection est solution du système :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

# Chapitre XI : ARITHMETIQUE (SPECIALITE)

## I. DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

### 1° Multiples et diviseurs

Soient a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est un **multiple** de b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que :
$a = b \times q$ .

**Ensemble des multiples :** Soit $a \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des multiples de a est $\{ \dots ; -ka ; \dots ; -2a ; -a ; 0 ; a ; 2a ; \dots ; ka ; \dots \}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si ces deux nombres sont non nuls, on dit que **b divise a**, que **b est un diviseur de a**.

### 2° Propriétés

#### a - Multiples

Soient a, b et c des entiers relatifs. Si a et b sont des multiples de c alors toutes les combinaisons linéaires $a u + b v$ ( avec u et v entiers relatifs) sont des multiples de c.

#### b - Diviseurs

Soient a, b et c des entiers relatifs.

- Si a divise b et c alors a divise toutes les combinaisons linéaires $b u + cv$ ( avec u et v entiers relatifs) .
- Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.
- Si a divise b et si b divise a alors $a = b$ ou $a = - b$
- Si a divise b alors ac divise bc.

### 3° Division euclidienne

Soient a et b des entiers relatifs avec b non nul.

Il existe un unique couple ( q , r ) avec q entier relatif et r entier positif tel que :

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{q} + \mathbf{r} \text{ avec } 0 \le r < |b| .$$

Cette opération qui à ( a , b ) associe ( q , r ) est la division euclidienne de a par b.

**q** est appelé le **quotient**
**r** est appelé le **reste**
**b** est appelé le **diviseur**
**a** est appelé le **dividende**

**NB :** Si b divise a, alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

## II. LES CONGRUENCES

### 1° Entiers congrus modulo n

Soit n un entier ( $n \geq 2$).

Deux entiers relatifs **a et b sont congrus modulo n** signifie que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n, ce qui est équivalent à dire que a – b est divisible par n.

On note : $a \equiv b\ [\ n\ ]$ ou $a \equiv b \pmod n$.

### 2° Propriétés

Soit n un entier ( $n \geq 2$). Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Si $a \equiv b\ [\ n\ ]$ alors $b \equiv a\ [\ n\ ]$.

Si $a \equiv b\ [\ n\ ]$ et $b \equiv c\ [\ n\ ]$ alors $a \equiv c\ [\ n\ ]$.

Si $a \equiv b\ [\ n\ ]$ et $c \equiv d\ [\ n\ ]$ alors $a + c \equiv b + d\ [\ n\ ]$ et $a - c \equiv b - d\ [\ n\ ]$.

Si $a \equiv b\ [\ n\ ]$ et $c \equiv d\ [\ n\ ]$ alors $a \times c \equiv b \times d\ [\ n\ ]$.

## III. LES NOMBRES PREMIERS

### 1° Définitions

Un entier naturel n est dit **premier** si $n \geq 2$ et si **ses seuls diviseurs positifs sont 1 et n**.

Soit n un entier avec $n \geq 2$. Deux cas sont possibles :

- soit n est premier.
- soit n admet un diviseur premier p tel que $2 \le p \le \sqrt{a}$.

## 2° Propriétés

Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Un nombre premier divise un produit de facteurs si et seulement si il divise un des facteurs.

Un nombre premier divise un produit de facteurs premiers si et seulement si il est égal à un de ces facteurs.

## 3° Décomposition en produit de nombres premiers

### a - Décomposition

Soit n un entier avec $n \geq 2$.

L'entier n se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.
On dit que c'est la **décomposition en produit de facteurs premiers de n.**

**Exemple :**

Décomposition de l'entier 616. On divise successivement les quotients obtenus par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 616 | **2** | = 308 | |
| 308 | **2** | = 154 | |
| 154 | **2** | = 77 | d'où $616 = 2^3 \times 7 \times 11$. |
| 77 | **7** | = 11 | (Produit de tous les quotients obtenus) |
| 11 | **11** | = 1 | |

### b - Diviseurs

Soit un entier positif m de décomposition en facteurs premiers : $m = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_n^{a_n}$.
Les diviseurs positifs de m sont les entiers de la forme :

$p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \ldots \times p_n^{b_n}$ avec $0 \leq b_i \leq a_i$ pour i allant de 1 à n.

## 4° Divisibilité dans $\mathbb{N}$

### a - Divisibilité par un nombre premier

Si p est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p alors, p et a sont premiers entre eux.

### b - Le petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p. Alors :

**$a^{p-1} - 1$ est divisible par p ( $a^{p-1} \equiv 1 \; [\, p \,]$ )**

De même, soit p un nombre premier et a un entier quelconque.
Alors :

**$a^p - a$ est divisible par p ( $a^p \equiv a \; [\, p \,]$ )**

# IV. PGCD

## 1° Définitions

Soient a et b deux entiers relatifs.

On appelle **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b, le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b. On note : PGCD ( a , b ) .

On appelle **Plus Petit Commun Multiple** de a et b, le plus petit entier naturel qui est à la fois multiple de a et de b. On note : PPCM ( a , b ) .

## 2° Nombres premiers entre eux

Deux entiers naturels non nuls sont dits **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b sont premiers entre eux.

## 3° Calcul du PGCD de deux entiers

### a - 1ère méthode : Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide utilise des divisions euclidiennes successives.

**Exemple :**
Déterminons le PGCD de 1800 et 1296.
La première division est : $1800 = 1296 \times 1 + 504$
On indique le quotient 1 au-dessus du diviseur 1296, et le reste 504 en dessous.
On divise ensuite 1296 par le reste 504. Et ainsi de suite.
Le dernier reste non nul est 72. C'est le PGCD de 1800 et 1296.

$1800=1296 \times 1 +504$
$1296=504 \times 2+288$
$504=288 \times 1+216$
$288=216 \times 1+72$
$216=72 \times 3+0$

| **Quotient** | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1800 | 1296 | 504 | 288 | 216 | **72** |
| **Reste** | 504 | 288 | 216 | 72 | 0 |

### b - 2ème méthode : décomposition en produit de facteurs premiers

On décompose a et b en produits de facteurs premiers. Le PGCD de a et b est alors **le produit des facteurs premiers** figurant dans les deux décompositions, chaque facteur étant **affecté du plus petit des exposants** dans les deux décompositions.

**Exemple :**
$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ et $1296 = 2^4 \times 3^4$
Le PGCD de 1800 et 1296 est donc $2^3 \times 3^2$, soit 72.

## 4° Théorème de Bézout

### a - <u>Deux entiers relatifs quelconques</u>

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD.
Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = d$.

**Corollaire :**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \times u + b \times v = 1$.

## 5° Théorème de Gauss

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si **a divise bc** et si **a et b sont premiers entre eux**, alors **a divise c**.

# Chapitre XII : CALCUL MATRICIEL ET APPLICATIONS (SPECIALITE)

# I. MATRICE ET OPERATIONS

## 1° Définitions

1. Une matrice de format (m, n) est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes. Ces nombres sont appelés des coefficients et sont notés : $a_{ij}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.
Le nombre $a_{ij}$ se trouve à l'intersection entre la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.
2. Si m = n, alors la matrice de format (n, n) est appelée **matrice carrée d'ordre n**.
3. Une matrice de format (m, 1) est appelée **matrice colonne**.
4. une matrice de format (1, n) est appelée **matrice ligne**.

**Exemples :**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & -9 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 7 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ est une matrice de format (4 , 5).

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Les matrices $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sont respectivement des matrices lignes et colonnes.

## 2° Somme de deux matrices

La somme de deux matrices de même format (m,n) est la matrice de format (m,n) obtenue en ajoutant entre eux les coefficients occupant la même position dans chaque matrice.

**Exemple :** $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 4 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 3 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**Propriétés de la somme des matrices :**
Soient A, B et C trois matrices de même format.
A + B = B + A, on dit que la somme de matrices est **commutative.**
(A + B) + C = A + ( B + C ), on dit que la somme de matrices est **associative**.

## 3° Produit d'une matrice par un réel :

Le produit d'une matrice par un réel est la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de cette matrice par ce réel.

**Exemple :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. La matrice 5 A est égale à $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -10 & 15 & 15 \\ -10 & 20 & 45 \end{pmatrix}$

**Propriétés :**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques et A et B deux matrices de même format.

$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ et $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ .

## 4° Produit de deux matrices

Soit A une matrice de format (m, p) de coefficients $a_{ij}$ et B une matrice de format (p , q) de coefficients $b_{ij}$ . Le produit de la matrice A par la matrice B, noté A $\times$ B ( ou AB ) est une matrice C de format (m , q ) tel que le coefficient $C_{ij}$ est égal à la somme des produits $a_{ik} \times b_{kj}$ pour k allant de 1 à p.

**Exemple :** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -9 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\times1+1\times(-2)-2\times0-2\times(-5) & 1\times0+1\times3-2\times1-2\times0 \\ 3\times1+3\times(-2)+0\times0+0\times(-5) & 3\times0+3\times3+0\times1+0\times0 \\ -4\times1+5\times(-2)-9\times0+1\times(-5) & -4\times0+5\times3-9\times1+1\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 9 \\ -19 & 6 \end{pmatrix}$$

**Propriété :**

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.(c'est-à-dire que AB n'est pas toujours égal à BA.)

**Exemple :**

En effet reprenons les deux matrices précédentes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+0\times3 & 1\times1+0\times3 & 1\times(-2)+0\times0 & 1\times(-2)+0\times0 \\ -2\times1+3\times3 & -2\times1+3\times3 & -2\times(-2)+3\times0 & -2\times(-2)+3\times0 \\ 0\times1+1\times3 & 0\times1+1\times3 & 0\times(-2)+1\times0 & 0\times(-2)+1\times0 \\ -5\times1+0\times3 & -5\times1+0\times3 & -5\times(-2)+0\times0 & -5\times(-2)+0\times0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne est égal à un nombre.

# II. MATRICE CARREE

**Définition :**
On appelle matrice carrée $I_n$ , la matrice d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1. Cette matrice est aussi appelée **matrice identité d'ordre n**.

**Exemple :**

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont respectivement des matrices identités d'ordre 3 et 4.

# III. INVERSE D'UNE MATRICE CARREE

**Définition :**
On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $A \times B = B \times A = I_n$.
La matrice B est appelée l'inverse de la matrice A et elle se note $A^{-1}$.

**Définition :**

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de la matrice A, le nombre $a \times d - b \times c$.

**Théorème :**
La matrice carrée d'ordre 2 est inversible si son déterminant est différent de zéro.
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

# IV. SYSTEME LINEAIRE

## 1° Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soit un système linéaire de n équation à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Le système linéaire admet pour écriture matricielle : A X = B.

### 2° Résolution d'un système linéaire

**Propriété :**

Soit A une matrice carrée.

Si la matrice A est inversible, alors le système d'équations dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$ admet pour solution $X = A^{-1} \times B$.

**Remarque :**

Le calcul de la matrice inverse peut se faire à l'aide de la calculatrice.

# V. SUITE DE MATRICES

### 1° Etat Stable

On définit une suite de matrices colonnes de format (N,1) par la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$ et le premier terme $U_0$.

**Définition :**

Un état stable est une suite constante qui vérifie la relation de récurrence suivante : $S = A \times S + B$.

**Propriété :**

Si la matrice $(I - A)$ est inversible, alors il existe un état stable S pour la relation de récurrence et celui-ci vaut : $S = (I - A)^{-1} \times B$.

**Preuve :**

L'état stable S est solution de $S = A \times S + B \Leftrightarrow S - A \times S = B \Leftrightarrow (I - A)S = B$ (car la multiplication de matrice n'est pas commutative) $\Leftrightarrow$

$$S = (I - A)^{-1} B \quad (\text{car } I - A \text{ est inversible }).$$

### 2° Convergence de la suite $U_n$

S'il existe un état stable S, on peut étudier une suite auxiliaire $V_n$ définie par $V_n = U_n - S$.

On montre aisément que la suite $V_n$ est géométrique de raison A, d'où les écritures :

$V_n = A \times V_{n-1}$ et $V_n = A^n \times V_0$ et finalement $U_n = V_n + S$.

La convergence de la suite $U_n$ dépend de la convergence de la matrice $A^n$.

# VI. PROCESSUS ALEATOIRE ET ETUDE ASYMPTOTIQUE

**Marche aléatoire :**

Soit un processus aléatoire formé de N états. On note $a_{ij}$ ( avec $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$ ) la probabilité de passage de l'état j vers l'état i. Cette probabilité est appelée **probabilité de transition**.
L'ensemble des nombres $a_{ij}$ forme une matrice appelé : **matrice de transition** d'un processus aléatoire.

**Exemple :**

Soit un processus aléatoire constitué de 3 états. La matrice T ci dessous, désigne la matrice de transition associée à ce processus.

$$T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, $a_{31} = 0,2$ ; cela signifie que la probabilité de transition de l'état3 vers l'état1 est égale à 0,2.

**Etude asymptotique :**

**Théorème :**

Soit A la matrice de transition d'un processus aléatoire. Soit $U_0$ et $U_n$ respectivement des matrices lignes désignant les états du processus aux instants zéro et n.
On a donc : $U_{n+1} = U_n \times A$ et $U_n = U_0 \times A^n$.

**Définition de la convergence d'une matrice :**

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)$ converge vers une matrice T de même format si les suites de coefficients de mêmes indices des matrices $U_n$ converge vers les coefficients de mêmes indices de la matrice T.

**Définition d'un état stable :**

On appelle état stable d'un processus aléatoire de matrice de transition A, toute matrice ligne T tel que : $T = A \times T$.

**Propriété :**

Si la suite de matrice $(P_n)$ converge, alors elle converge vers un état stable du processus.

# Partie B : ENONCES DES EXERCICES

-  : exercices d'application directe du cours.
-  : exercices demandant un raisonnement plus complexe.
-  : exercices plus difficiles ou plus longs.

# Chapitre I : LIMITES ET CONTINUITE

**EXERCICE 1.1**

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ :
   a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
   b) $f(x) = 7x^7 - 2x^4 - x^3 - 1$
   c) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x$
   d) $f(x) = 1000x^5 - x$
2) Etudier les limites de f en les valeurs indiquées, et si f n'est pas définie en ce point, étudier la limite à droite et la limite à gauche :
   a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 et -2 .
   b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2 .
   c) $f(x) = \dfrac{x+4}{(x-4)^2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 4 .
   d) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{(1-x)^2}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1 .

**EXERCICE 1.2 (CORRIGE)**

Déterminer la limite de la fonction f en $x_0$ :

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ en $x_0 = -2$
2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$
3) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1} - 1}$ en $x_0 = 2$
4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ en $x_0 = 1$
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x-1}$ en $x_0 = 1$
6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$ en $x_0 = 0$ et en $x_0 = 1$

**EXERCICE 1.3**

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ .
2) a) Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$ .
   b) Ecrivez $4x^2 - 4x + 3$ sous forme canonique.
   c) Déterminer la limite $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g définie par :

**EXERCICE 1.4**

Etudier la limite de f à l'aide des théorèmes de comparaison :

1) $f(x) = \cos(x) - 2x$ en $+\infty$ .
2) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ en c .
3) $f(x) = x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 .

## EXERCICE 1.5

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x > 2$ , $\frac{4x + \cos(x)}{x} \leq f(x) \leq \frac{4x + 7}{x - 2}$ .

   Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$ ?

2) Soit f une fonction telle que $|f(x) - 23| \leq \frac{1}{x+2}$ .

   Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$ ?

## EXERCICE 1.6

Soit la fonction f définie par : : $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ avec E la fonction « partie entière ».

Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$ ?

## EXERCICE 1.7

Déterminer la limite de la fonction f à l'aide du théorème sur la limite de fonctions composées :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ .
2) $f(x) = \left( x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^4$ en c.

## EXERCICE 1.8

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ , à l'aide du théorème sur la limite des fonctions composées.

## EXERCICE 1.9

A l'aide d'un changement de variable, étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$ .

## EXERCICE 1.10

Rechercher les asymptotes horizontales et verticales aux courbes représentatives des fonctions suivantes. On étudiera la position de l'asymptote horizontale.

1) $f(x) = \frac{2}{x - 3}$   2) $f(x) = \frac{3x - 4}{2x + 1}$   3) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{2x}$   4) $f(x) = 2x + \frac{x}{x^2 + 2}$

**EXERCICE 1.11 (CORRIGE)**

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x^2 + 1}$ .
2) Montrer que la fonction f admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation.

**(On rappelle que la courbe d'une fonction f admet la droite (d) d'équation y = ax + b comme asymptote oblique si $\lim_{x\to\infty} f(x) - y = 0$)**

**EXERCICE 1.12**

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2}$ . Calculer f(-1), f(-1/2), f(0) et f(1).

En déduire que l'équation f(x) = 0 admet au moins trois racines réelles distinctes dans l'intervalle
[ -1 ; 1 ] .

**EXERCICE 1.13**

Montrer que chacune des équations suivantes admet une unique solution $\beta$ et encadrer $\beta$ entre deux entiers consécutifs :

1) $x^3 + 2\,x = 5$
2) $\cos x - 2\,x = 0$
3) $x + \sqrt{x} + 2 = 3$
4) $x^3 + x^2 = 9$

**EXERCICE 1.14**

Soit f une fonction continue définie sur I = [ 0 ;1 ] telle que pour tout x de I, f(x) appartient à I. Soit g la fonction définie sur I par g(x) = f(x) – x . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g, démontrer qu'il existe un réel c dans I tel que f(c) = c .

**EXERCICE 1.15**

Prérequis : On dit que f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme ]A ; $+\infty$ [ contient f(x) pour x assez grand.
On considère deux fonctions f et g telles que :
- Il existe un réel b tel que pour tout x supérieur à b, $f(x) \geq g(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

**EXERCICE 1.16**

On considère une fonction polynôme P non constante.
Ecrire un algorithme qui demande le degré de P, le signe du coefficient du terme de plus haut degré de P et qui renvoie les limites de P en plus ou moins l'infini.

**EXERCICE 1.17**

a. On considère une fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ où a et b sont deux réels tels que a est non nul.
Ecrire un algorithme qui demande les valeurs a et b et renvoie les limites de f à gauche et à droite de $-\dfrac{b}{a}$.

b. On considère une fonction homographique g définie par $g(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ où a, b, c et d sont quatre réels avec a non nul.
Ecrire un algorithme qui demande les valeurs a, b, c et d et renvoie les limites de g à gauche et à droite de $-\dfrac{b}{a}$.

# Chapitre II : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS

**EXERCICE 2.1**

Les fonctions f suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

1) $f(x) = x^3 \sqrt{x}$

2) $\begin{cases} f(0) = 0 \\ x \neq 0, f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$

3) $f(x) = x\,|x|$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

**EXERCICE 2.2**

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a :

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ en $a = 1$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $a = 1$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$

4) $f(x) = x^2 + x + 2$ en $a = 3$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ en $a = 4$

6) $f(x) = \cos(x)$ en $a = 0$

**EXERCICE 2.3 (CORRIGE)**

Trouver la limite de f au point a en utilisant la définition du nombre dérivé :

1) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ en $a = 0$

2) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$ en $a = 0$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$ en $a = 8$

4) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$ en $a = 0$

**EXERCICE 2.4**

Soit la fonction $f : x \rightarrow \dfrac{x+2}{7-x}$, de courbe représentative $C_f$ dans un repère orthonormé.

1) Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 5$ .
2) Déterminer une équation de la tangente (d) à $C_f$ au point d'abscisse $x_0 = 5$ et étudier la position de $C_f$ par rapport à (d).

**EXERCICE 2.5**

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée :

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$

2) $f(x) = x^5 + \sqrt{x}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

5) $f(x) = 5\sin(x) + 2\cos(x)$

6) $f(x) = (3x-2)x^3$

7) $f(x) = 2x\cos(x)$

9) $f(x) = (\sin(x))^2$

10) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{2+x}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+2}{3x-2}$

4) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

8) $f(x) = \cos(x)\sin(x)$

12) $f(x) = (x^5 + 2x^3 + 4)^5$

## EXERCICE 2.6

Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable, calculer sa dérivée et dresser le tableau des variations :

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$
2) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$
3) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x+2}$
4) $f(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$
5) $f(x) = x \sin x$
6) $f(x) = \sqrt{x+3}$

## EXERCICE 2.7

Déterminer les extremums locaux de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

1) $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ sur $\mathbb{R}$
2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
3) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{2x-4}$ sur $]\, 2\, ; +\infty\, [$
4) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ sur $]\, 0\, ; +\infty\, [$
5) $f(x) = -x^3 + x^2$ sur $\mathbb{R}$
6) $f(x) = \sin x - x$ sur $\mathbb{R}$

## EXERCICE 2.8

Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée :

1) $f(x) = (2x+4)^2$
2) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$
3) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
4) $f(x) = (x^2 + 2x - 4)^3$
5) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
6) $f(x) = \cos(\cos x)$

## EXERCICE 2.9

Calculer la dérivée de f sur l'ensemble indiqué :

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$ sur $[\,-1\, ; 2\,[$
2) $f(x) = \sqrt{4-x}$ sur $]\,-\infty\, ; 4\,[$
3) $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{(3x+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$ - {-1/3}
4) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ sur $[\,0\, ; \dfrac{\pi}{2}\,[$
5) $f(x) = \tan(3x)$ sur $[\,0\, ; \dfrac{\pi}{6}\,[$
6) $f(x) = \dfrac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^3}$ sur $[\,0\, ; \dfrac{\pi}{2}\,[$

**EXERCICE 2.10 (CORRIGE)**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

1) Montrer que pour tout réel x : $(1+x^2)f'(x) = x\,f(x)$.
2) Quelle relation vérifient $f''(x)$, $f'(x)$ et f(x) ?

**EXERCICE 2.11**

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

1) Vérifier que pour tout x de ℝ : $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
2) En déduire que pour tout x de ℝ : $(1+x^2)f''(x) + x\,f'(x) - f(x) = 0$.

**EXERCICE 2.12**

Soit f une fonction dérivable sur ℝ. Montrer que :

1) si f est impaire, alors f ' est paire.
2) si f est paire, alors f ' est impaire.
3) si f est T-périodique, alors f ' est T-périodique (T réel).

**EXERCICE 2.13**

Etudier la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 2) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+x+4}$ 3) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$

**EXERCICE 2.14**

1) On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

   a) Etudier les variations de P sur ℝ.
   b) Montrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique racine réelle $\alpha$ dans l'intervalle ] 1,6 ; 1,7 [.

2) Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1. On considère la fonction f définie sur D par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$. On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 4 cm comme unité).

   a) Etudier les variations de f (utiliser les résultats de la première question).
   b) Ecrire une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe C au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $C_f$ par rapport à la droite $\Delta$ dans l'intervalle ] -1 ; 1 [ .
   c) Montrer que la courbe $C_f$ est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Tracer la droite $\Delta$, la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1 et la courbe $C_f$ .

**EXERCICE 2.15**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$.

Soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Etudier les variations de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ .
   b) Préciser les équations des asymptotes de $C_f$ (pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$ ) .
   c) Tracer la courbe $C_f$ .
2) a) Soit m un nombre réel et soit $\Delta$ la droite d'équation y = m. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $\Delta$ et de $C_f$ .
   b) Pour tout $m>\sqrt{2}$ , on appelle A et B les points d'intersection de $\Delta$ et de $C_f$ . Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $]\sqrt{2}\ ;+\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite (d) d'équation $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ .

**EXERCICE 2.16 (CORRIGE)**

On considère les fonctions f et g d'une variable réelle définies par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x)=2x^3+x^2-1$$

1) Montrer que pour tout réel $x\neq 0$, $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.
2) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ . En déduire que l'équation g(x) = 0 admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$, avec $0<\alpha<1$ .
3) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4) On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de $C_f$ d'abscisse -1 et par J le point de $C_f$ d'abscisse +1.
   a) Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à $C_f$ .
   b) Déterminer une équation de la tangente T en I à $C_f$ .
5) Etudier la position de $C_f$ par rapport à T.
6) Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe $C_f$ (on prendra $\dfrac{2}{3}$ comme valeur approchée de $\alpha$ ).

**EXERCICE 2.17**

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x^3-2x^2-1$.

1) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans R.
2) Encadrer cette solution par deux entiers consécutifs a et b.
3) On veut écrire un algorithme permettant de donner un encadrement à $10^{-n}$ de la solution. Voici une proposition d'algorithme ( Il s'agit de la méthode de dichotomie).

*Initialisation*
    *X prend la valeur a*
    *Y prend la valeur b*

*D prend la valeur* $10^{-n}$

*Traitement*

*Tant que* $b - a > d$

*M prend la valeur* $\frac{a+b}{2}$

*Si* $f(m) > 0$

*Alors b prend la valeur m*

*Sinon*

*A prend la valeur m*

*Fin si*

*Fin Tant que*

*Sortie*

*Afficher a et b.*

a) Remplir le tableau ci-dessous

| | *Etape 1* | *Etape 2* | *Etape 3* |
|---|---|---|---|
| *A* | | | |
| *B* | | | |
| *C* | | | |

b) Expliquer à l'aide d'un graphique comment fonctionne dans l'algorithme le rôle du « si ».

4) Donner un encadrement à $10^{-5}$ près de la solution.

# Chapitre III : FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

**EXERCICE 3.1**

On sait que, pour tous réels a et b, exp(a+b)=exp(a) x exp(b)

1) En utilisant la formule précédente, démontrer que pour tout x réel,

$$\exp(3x) = [\exp(x)]^3$$

2) Démontrer que, pour tout réel à et pour tout entier naturel n, $\exp(na) = [\exp(a)]^n$ .

**EXERCICE 3.2**

a) supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur R telle que f' = f et f(0) = 1.

En démontrant que la fonction F définie par F(x) = f ( x ) f ( - x ) est constante sur R, démontrer que

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

b) Supposons qu'il existe deux fonctions f et g dérivables sur R, égales à leurs propres dérivées, qui prennent la valeur 1 en 0.

En démontrant que la fonction h définie par $h(x) = f(-x)f(x)$ est constante sur R, démontrer que f Et g sont égales sur R.

**EXERCICE 3.3**

a) On considère les pré-requis suivants :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur ]0 ; $+\infty$[ et sa dérivée est la fonction inverse ;
- On a ln (1) = 0.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et b, ln ab = ln a + ln b ( On pourra Etudier les variations de la fonction f (x) = ln(ax) – ln (x) ).

b) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln(a^2) = 2\ln(a)$, $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$ et $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

**EXERCICE 3.4**

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

**EXERCICE 3.5**

Simplifiez au maximum les écritures ci-dessous :

a) $f(x) = 4\exp(x) \times \exp(5x+3)$

b) $g(x) = \dfrac{\exp(8x-4)}{\exp(4) \times \exp(x+2)}$

c) $h(x) = [\exp(x)]^3 \times [\exp(-5x)]^2$

d) $k(t) = \dfrac{1}{[\exp(t+3)]^{-4}}$

e) $A = 3\ln(e^4) + \ln(\sqrt{e})$

f) $B = \ln(e^2\sqrt{e}) - \ln(\dfrac{1}{e})$

g) $C = \ln(\dfrac{\sqrt{e}}{e})$

h) $D = \dfrac{[\ln(e^3)]^2}{\ln(e^4)}$

**EXERCICE 3.6**

Démontrer les égalités ci - dessous :

a) Pour tout $x \in R$, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x+2}$

b) Pour tout $x \in R$, $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2e^x}$

c) Pour tout $x \in R$, $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \dfrac{2}{e^x+1}$

**EXERCICE 3.7**

Pour chaque fonction, préciser sur quel intervalle (ou union d'intervalles) la fonction considérée est définie, dérivable et calculer sa fonction dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

2) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

3) $h(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$

4) $q(x) = \ln(1 + e^x)$

**EXERCICE 3.8**

Vérifier que la fonction f est dérivable en tout point de I et calculez f' :

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ sur $I = ]2;+\infty[$

2) $f(x) = \ln(\ln(x))$ sur $I = ]e;+\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$ sur $I = ]-\infty;+\infty[$ R

4) $f(x) = e^{x\ln x}$ sur $I = ]0;+\infty[$

5) $f(x) = x^3e^x$ sur $I = ]0;+\infty[$

6) $f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$ sur $I = ]-\infty;1[$

**EXERCICE 3.9**

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

2) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

3) $(\ln x)^2 - 3\ln(x) - 28 = 0$

4) $\dfrac{e^x+5}{5+e^{-x}} = 1$

5) $e^{2x} - 14e^x + 33 = 0$

6) $9e^{4x} - 25e^{2x} + 16 = 0$

**EXERCICE 3.10**

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(x-3) + \ln(2x+6) \leq 0$
2) $(\ln(x))^3 - 25\ln(x) \geq 0$
3) $\ln(x+2) \leq \ln(8-2x)$
4) $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^{x} > 0$
5) $e^{2x-2} - e^{x-1} - 2 \geq 0$
6) $e^{x^2-5x} \geq 1$

**EXERCICE 3.11 (CORRIGE)**

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \ln(x)\ln(y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = 0 \\ \ln(x+y) = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} e^{x} - 2e^{y} = -5 \\ 3e^{x} + e^{y} = 13 \end{cases}$

**EXERCICE 3.12**

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+2}{2e^{x}-3}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x))$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^{x} + 1)$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$
6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$

**EXERCICE 3.13**

Calculer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$ :

1) $f(x) = \sqrt{1+(\ln(x))^2}$
2) $f(x) = x - \ln(x)$
3) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x} - x$
4) $f(x) = e^{\frac{-x^2+1}{x}}$

***Pour l'exercice 3.14 on rappelle qu'une droite (d), d'équation y = a x + b est Une asymptote oblique à la courbe de f si*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - y = 0$

**EXERCICE 3.14**

A. - La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.
En utilisant le sens de variation de g, déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B. - La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3\ln(x)}{\sqrt{x}} + x - 1$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Utiliser la partie A. pour déterminer le sens de variation de f.
3) Soient $\Delta$ la droite d'équation $y = x - 1$ et $C_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.
   a) Montrer que $\Delta$ est asymptote à $C_f$ et étudier la position relative de $C_f$ et $\Delta$.
   b) Construire $\Delta$ et $C_f$.

## EXERCICE 3.15

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.

1) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ et que $f'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1)$.
2) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera $\alpha$, dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}\,;\sqrt{e^2-1}\,]$, tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner une approximation décimale à $10^{-2}$ près par défaut de $\alpha$.
4) En déduire le signe de f(x) pour x appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$.

## EXERCICE 3.16 (CORRIGE)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1) Etudier la fonction f (ensemble de définition, parité, variations de f ).
2) Montrer que f réalise une bijection de ℝ sur un ensemble E à préciser.
3) Expliciter la fonction réciproque de f.
4) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et de sa fonction réciproque.

## EXERCICE 3.17

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = x(1 - \ln(x))$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
On appelle $C_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.
2) a) Etudier la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f.
3) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $C_f$ au point d'abscisse e.
   b) Préciser la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0. Tracer T et $C_f$.

## EXERCICE 3.18

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f_n(x) = -nx - x\ln x$.
On note $(C_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i};\vec{j})$.
Les courbes $(C_0)$, $(C_1)$ et $(C_2)$ représentatives des fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$ sont données ci-dessous. On rappelle que $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

***Partie A – Etude de la fonction $f_0$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.***

1) Déterminer les limites de $f_0$ en $+\infty$.
2) Etudier les variations de la fonction $f_0$ sur $]0\,;+\infty[$.

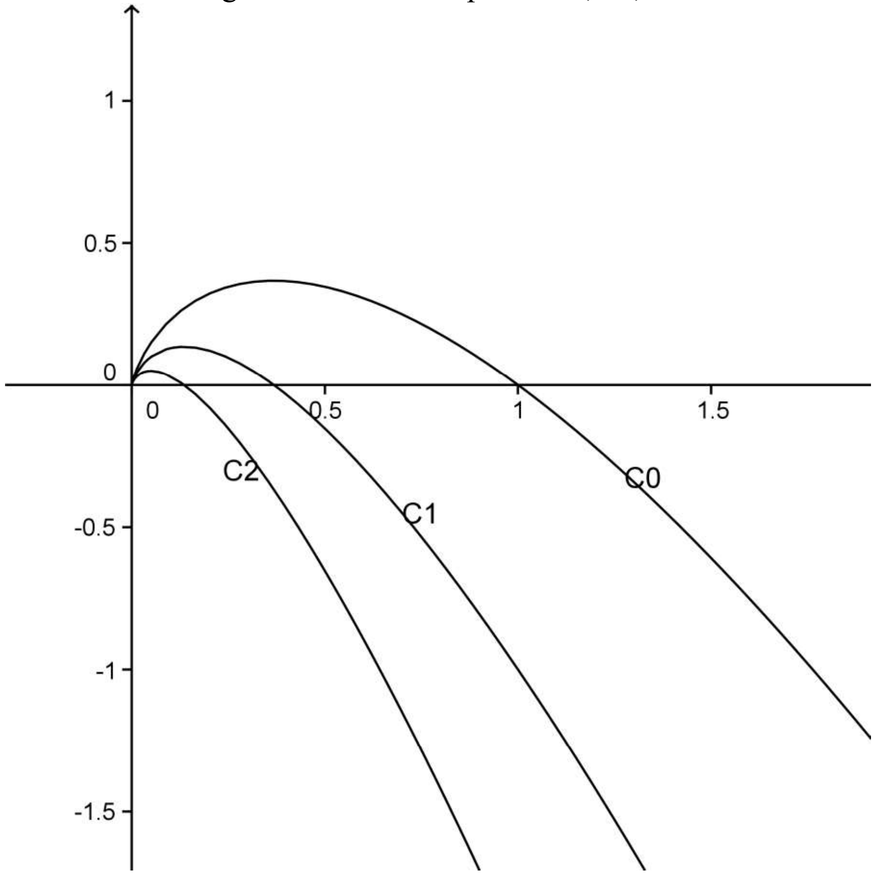
***Partie B – Etude de certaines propriétés de la fonction $f_n$, n entier naturel.***

Soit n un entier naturel.

1) Démontrer que pour $x \in ]0;+\infty[$, $f_n'(x) = -n - 1 - \ln x$ ou $f'_n$ désigne la fonction dérivée de $f_n$.

2) a. Démontrer que la courbe ($C_n$) admet en unique point $A_n$ d'abscisse $e^{-n-1}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
b. Prouver que le point $A_n$ appartient à la droite ($\Delta$) d'équation y = x.
c. placer sur la figure ci-dessous les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

3) a. Démontrer que la courbe ($C_n$) coupe l'axe des abscisses en un point, noté $B_n$, dont l'abscisse est $e^{-n}$.
b. Démontrer que la tangente à ($C_n$) au point $B_n$ a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
c. Placer sur la figure en annexe les points $B_0$, $B_1$, $B_2$.



# Chapitre IV : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

**EXERCICE 4.1**

Donner l'ensemble de dérivabilité des fonctions ci-après et calculer leur dérivée :

$f(x) = 2x\sin x + \cos(\frac{2\pi}{5})$ $\quad g(x) = (\cos x)^3$ $\quad h(x) = \sin x(\cos x)^3$

$k(x) = \cos(5x+3)$ $\quad u(x) = \dfrac{1}{\cos(3x+\frac{\pi}{2})}$ $\quad v(x) = \dfrac{3}{\sin x}$

**EXERCICE 4.2**

A l'aide du nombre dérivée, déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ $\quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$

**EXERCICE 4.3**

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions numériques ci-après :

$f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{3x-5}{\cos x - 4}$ $\quad f(x) = \dfrac{2\sin x}{x} - 4$

Donner les équations des éventuelles asymptotes horizontales à chacune de ces courbes.

**EXERCICE 4.4**

1) Dans chaque cas, encadrer cosa

a. $\frac{\pi}{3} \le a \le \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ b. $-\frac{3\pi}{4} \le a \le 0$ $\quad$ c. $0 \le a \le 2\pi$

2) Dans chaque cas, encadrer sint

a. $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{3}$ $\quad$ b. $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ c. $\frac{3\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}$

**EXERCICE 4.5**

a. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = 9 - 2\sin x$

b. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = 3\cos x - 1$.

**EXERCICE 4.6**

Dans chaque cas, déterminer sur l'intervalle I donné, les variations de la fonction f

a. $f(x) = 3\cos x + 5x - 10$ sur I = R

b. $f(x) = 1 - 3x + 3\sin x$ sur I = $[0 ; \pi]$

c. $f(x) = \sin x \cos x$ sur I = $[0 ; \frac{\pi}{4}]$

## EXERCICE 4.7

Résolvez les équations ci-dessous :

a. $5\sin(2x+\frac{\pi}{3})=0$ b. $-4\cos(3-x)=0$ c. $\cos(4x-\frac{\pi}{6})=1$

c. $\sin^2(3x)=\frac{1}{2}$

## EXERCICE 4.8

1) Démontrer que le signe de f est constant pour tout x dans R.

a. $f(t)=\cos(3t)+2$ b. $f(x)=5-3\sin(2x-\frac{\pi}{8})$ c. $f(x)=\sin^2(x-\frac{\pi}{6})-1$

d. $f(x)=-4\cos^2(3x)$

2) Etudier le signe des fonctions f sur l'intervalle I

a. $f(t)=-\frac{1}{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})-1$ sur $I=[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{12}]$

b. $f(x)=5\sqrt{2}\sin(5\pi t)$ sur $I=[\frac{1}{5};\frac{2}{5}]$

## EXERCICE 4.9

Soit f la fonction définie sur R par :

$f(t)=2\sin(4t+\frac{\pi}{3})$

a. Etudier la parité de la fonction f.

b. Démontrer que f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

c. résoudre l'équation f'(t) = 0.

d. Etablir le tableau de variation de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

## EXERCICE 4.10

On considère la fonction f définie sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et calculer sa fonction dérivée.
2. Etudier les variations de la fonction f.

## EXERCICE 4.11

On considère la fonction f définie sur R par :

$f(x)=|\sin x|$

1. Etudier la parité de la fonction f.
2. Etudier la périodicité de la fonction f.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

**EXERCICE 4.12**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.

Soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que f est $2\pi$ - périodique.
2) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. En déduire que la droite $\Delta$ d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $C_f$.
3) Etudier les variations de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4) Tracer $C_f$ à l'aide des questions précédentes.

**EXERCICE 4.13**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin(x)$ et de déterminer des valeurs approchées de la solution non nulle de l'équation f(x) = 0 qui appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

A - 1) a) Calculer la dérivée $f'$ de f et étudier le sens de variation de $f'$ sur $[0\,;\pi]$.

b) Etudier les variations de f sur $[0\,;\pi]$ et construire l'arc de courbe $\Gamma$ correspondant (prendre 3 cm comme unité).

c) Etudier la parité de f. En déduire comment la courbe représentative $C_0$ de f sur $[-\pi\,;\pi]$ se déduit de $\Gamma$.

2) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

En déduire que C se déduit de $C_0$ par des translations successives, que l'on précisera.

B - 1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$.

b) Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right[$.

2) Soient p un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\Delta_p$ la tangente à C au point $A_p$ d'abscisse p.

a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$ par : $\varphi(x) = f(x) - f'(p) \times (x - p) - f(p)$.

Etudier les variations de $\varphi$ et déterminer le signe de $\varphi(x)$.

b) En déduire que sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$, la courbe C est située au-dessus de $\Delta_p$.

Tracer C sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$, en prenant 20 cm pour unité.

# Chapitre V : INTEGRALES ET PRIMITIVES

**EXERCICE 5.1**

Démontrer l'inégalité suivante : $-\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)dx \leq \frac{\pi}{2}$ .

**EXERCICE 5.2**

Donner la valeur moyenne des fonctions f sur l'intervalle indiqué :

1) $f(x) = 2x - 3$ sur $[0;5]$
2) $f(x) = 2x^3$ sur $[0;2]$
3) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $[-2;2]$

**EXERCICE 5.3**

En utilisant la relation de Chasles, calculer l'intégrale : $\int_{-2}^{0} \left( |x+1| + \frac{4}{x-1} \right) dx$

**EXERCICE 5.4**

Trouver un encadrement des intégrales suivantes après avoir déterminé les extremums des fonctions sur l'intervalle d'intégration :

1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3(t)\right)dt$ 2) $\int_2^3 \frac{\ln(t)}{t}dt$ 3) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$

**EXERCICE 5.5**

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle indiqué :

1) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$ sur $I = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$
3) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}_+$
4) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{4}$ sur $I = \mathbb{R}$
5) $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3+8)^3}$ sur $I = ]-2; +\infty[$
6) $f(x) = e^{3x+2}$ sur $I = \mathbb{R}$

**EXERCICE 5.6**

Trouver la primitive F de f sur I telle que :

1) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $I = ]0; +\infty[$ avec $F(e) = 5$
2) $f(x) = x^3$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(2) = 5$
3) $f(x) = -2\sin(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $F(\frac{\pi}{4}) = 1$

## EXERCICE 5.7

Justifier que f est continue sur [ a , b ] , et calculer $\int_a^b f(t)dt$

1) $f(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$ , a = 0 et b = 1
2) $f(t) = \sin(t)\cos(t)$ , $a = \dfrac{\pi}{4}$ et b = 0
3) $f(t) = \tan(t)$ , $a = \dfrac{\pi}{4}$ et b = 0
4) $f(t) = \dfrac{1}{t^6}$ , a = 1 et b =2
5) $f(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+2t^3}}$ , a = 0 et b = 1
6) $f(t) = \dfrac{2t}{(t^2+1)^3}$ , a = -1 et b = 0

## EXERCICE 5.8

En écrivant la fonction à intégrer comme une somme de fonctions simples, calculer :

$$\int_1^2 \frac{x^4+3x^2+2}{x^2}\,dx\,.$$

## EXERCICE 5.9

La fonction h est définie sur ℝ* par $h(x) = \dfrac{e^x-2}{e^x-1}$ .

1) Déterminer a et b réels tels que pour tout x appartenant à ℝ* : $h(x) = a + \dfrac{be^x}{e^x-1}$ .
2) Calculer $\int_1^2 h(x)dx$ .

## EXERCICE 5.10

En reconnaissant la dérivée d'une fonction composée, calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}dx$
2) $\int_0^1 \dfrac{3\,e^x}{3\,e^x+1}dx$
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)dx$
4) $\int_0^3 \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$
5) $\int_0^1 x\,e^{x^2}dx$
6) $\int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x}dx$

## EXERCICE 5.11

Soient les intégrales suivantes : $A = \int_0^\pi x\cos^2(x)\,dx$ et $B = \int_0^\pi x\sin^2(x)\,dx$.

1) Calculer A + B.
2) En calculant la dérivée de $\left(\dfrac{x\sin 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4}\right)$, calculer A – B .
3) En déduire les valeurs de A et B.

## EXERCICE 5.12

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+8}{(x-2)^2}$ .

1) Montrer que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-2)^2}$, où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
2) Etudier et tracer C, courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.
3) Soit S(m) l'aire délimitée par C et les droites $D_1 : y = x + 1$ ; $D_2 : x = 4$ ; $D_3 : x = 4 + m$, avec $m > -2$ .
   a) Calculer S(m) .
   b) Calculer $\lim\limits_{m \to -2} S(m)$ et $\lim\limits_{m \to +\infty} S(m)$ .

**EXERCICE 5.13**

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -x + \dfrac{3}{2} - \dfrac{x}{x^2+1}$. $C_f$ est la représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthogonal (unité : 2cm). Soit la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = -x + \dfrac{3}{2}$. $C_g$ est la représentation graphique de g. Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine du plan limité par Cf, Cg et les droites d'équations x = 0 et x = 5 .

**EXERCICE 5.14 (CORRIGE)**

Soit f la fonction numérique définie sur ℝ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .
Pour tout nombre réel strictement positif $\alpha$, on pose : $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$ .

1) Montrer que f est une fonction à valeurs positives. En déduire le signe de $I(\alpha)$ ?
2) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre réel x, $\dfrac{e^x}{1+e^x} = a + \dfrac{b}{1+e^x}$ .
   En déduire le calcul de $\int_0^\alpha \dfrac{1}{1+e^x}dx$ .
   b) Calculer $f + f'$ où $f'$ est la fonction dérivée de f .
   c) Calculer $I(\alpha)$ .

**EXERCICE 5.15**

Soit $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ , $J = \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$
L'objectif est de calculer I, J et K.

1) Soit f la fonction définie sur [ 0 ; 1 ] par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ .
   a) Calculer la fonction dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$ .
   b) En déduire la fonction dérivée $f'$ de f.
   c) Calculer la valeur de I.
2) Vérifier que J + 2I = K.
3) On admet que $K = \sqrt{3} - J$, en déduire les valeurs de J et de K.

## EXERCICE 5.16

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Soit C la courbe représentative de f et soit $\Delta$ la première bissectrice.

A - 1) Montrer que f est dérivable en 0.

2) a) Montrer que pour x < 0, on a $f'(x) > 0$ .

b) Etudier les variations de $f'$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ . En déduire que pour x > 0, on a : $f'(x) > 0$ .

c) Construire le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

b) On admettra l'inégalité suivante : $1 + t \leq e^t \leq \dfrac{1}{1-t}$ pour t < 1.

En déduire que pour x < 0, on a : $\dfrac{x}{x-1} \leq x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq 1$ .

c) On admet que la droite (d) d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique à la courbe de $C_f$, étudier les positions relatives de $C_f$ et de (d) pour x < 0.

4) Construire C et préciser l'intersection de C et de $\Delta$.

B - 1) Montrer que la fonction F définie par F : $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}(x^2 - 2x)$ est une primitive de f.

2) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par $\Delta$ , C et les droites d'équations : x = 0 et x = e – 1 .

## EXERCICE 5.17 (CORRIGE)

A - Soit la fonction f définie sur ] -1 ; 0 ] par : $f(x) = \ln(1 - x^2) - x$ .

On désigne par C la courbe représentative de f dans la plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

1) Déterminer la limite de f en -1. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2) Etudier les variations de f.
3) Donner le coefficient directeur de la tangente (d) à la courbe C au point d'abscisse 0.
4) Tracer (d) et C.
5) On admet que l'équation f(x) = 0 a deux solutions 0 et $\alpha$ . Vérifier que $\alpha$ appartient à l'intervalle ] -0,72 ; -0,71 [ .

B - 1) Vérifier l'égalité $\int_\alpha^0 \ln(1-x^2)dx = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx + \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$ .

2) Calculer les dérivées des fonctions u et v définies par : $u(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ et $v(x) = -(1-x)\ln(1-x) - x$ .

En déduire les valeurs de I et de J.

$I = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx$ et $J = \int_\alpha^0 \ln(1-x)dx$

3) Calculer en fonction de $\alpha$ l'intégrale $K = \int_\alpha^0 f(x)dx$ .

4) Soit A l'aire, exprimée en cm², de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C, et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.
   a) Calculer A en fonction de $\alpha$.
   b) Montrer qu'en prenant $\alpha = -0{,}71$, on obtient une valeur approchée de A par défaut.

**EXERCICE 5.18**

On considère un entier relatif n et $f(x) = x^n$.

a. On suppose tout d'abord que n est positif ou nul.
Démontrer que f est continue sur tout intervalle [a ; b] ( a < b) et exprimer $\int_a^b f(x)dx$ en fonction de a, b et n.

b. On suppose maintenant que n est strictement négatif. Démontrer que f est continue sur [a ; b] si et seulement si a et b sont non nuls et de même signe.
Exprimer alors $\int_a^b f(x)dx$ en fonction de a, b et n. ( On prendra garde au cas où n = -1).

c. Ecrire un programme à qui on fournit a, b et n et qui renvoie, lorsque cette quantité est définie, la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

# Chapitre VI : SUITES NUMERIQUES

**EXERCICE 6.1**

Soient ($U_n$) et ($V_n$) deux suites telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang.
Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ .

**EXERCICE 6.2**

Démontrer que toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

**EXERCICE 6.3**

($U_n$) est une suite géométrique de premier terme $U_0$ non nul et de raison q non nulle.
Démontrer les affirmations suivantes :

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite ($U_n$) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors la suite ($U_n$) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U_0$ (($U_n$) est constante ).
- Si $q > 1$, alors la suite ($U_n$) diverge avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si $U_0 > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ si $U_0 < 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite ($U_n$) diverge et n'a pas de limite.

**EXERCICE 6.4**

Soit la suite ( $u_n$ ) définie par : $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$ , où n est un entier naturel, $n \geq 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ : $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**EXERCICE 6.5**

Pour tout entier naturel n, on note la proposition P : $3^n \geq (n+2)^2$ .

1) La proposition P est-elle vraie au rang 0 ? 1 ? 2 ? 3 ?
2) Démontrer par récurrence que la proposition Pest vraie pour tout entier $n \geq 3$ .

**EXERCICE 6.6**

Soit n un entier naturel. On définit la suite ( $u_n$ ) par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

1) $u_n < 6$ .
2) $u_n = 6 - \dfrac{8}{2^n}$ .

**EXERCICE 6.7**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison q, de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

Déterminer les valeurs de q telles que $2u_2 = 3u_1 - u_0$ et calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

**EXERCICE 6.8**

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$, de raison 2.
Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \ln(u_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

**EXERCICE 6.9 (CORRIGE)**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $u_n \neq 1$.
2) Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = \frac{2+u_n}{1-u_n}$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.
3) Calculer la raison q de $(v_n)$, le premier terme $v_0$ et le terme général $v_n$.
4) La suite $(v_n)$ est-elle convergente ?
5) Etudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 6.10**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$, et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2) Montrer que $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.
3) En déduire par récurrence qu'on a toujours $u_n > 1 > \frac{1}{2}$ et en déduire que la suite $(u_n)$ est bien définie pour tout n.
4) Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ est une suite arithmétique.
5) Ecrire $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n.

**EXERCICE 6.11**

Etudier la limite de la suite $(u_n)$ à l'aide d'un théorème de comparaison :

1) $u_n = \cos n - n$
2) $u_n = \frac{3 - \sin n}{n}$
3) $u_n = 2n + (-1)^n$
4) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**EXERCICE 6.12**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$, et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ .

1) Montrer que la suite est majorée par 2.
2) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} < \dfrac{2-u_n}{2}$
3) En déduire que $0 < 2 - u_{n+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
4) Montrer que la suite $(2-u_n)$ converge vers 0. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 6.13**

On définit les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right) \end{cases}$ et $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$ .

1) Montrer que pour $n \geq 0$, on a $v_{n+1} = v_n^{\,2}$. En déduire la relation $v_n = v_0^{\,2^n}$ .
2) Montrer que $v_0 = \dfrac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ , et en déduire la majoration : $|v_0| < \dfrac{1}{16}$ .
3) Déterminer alors la limite de $(v_n)$, puis celle de $(u_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

**EXERCICE 6.14**

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Etudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \to \sqrt{3x+4}$ .
   b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
2) a) Montrer que la suite $(u_n)$ est majorée par 4.
   b) Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante, et en déduire qu'elle converge.
3) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(4-u_n)$ .
   b) En déduire la limite de $(u_n)$.
   c) Etudier la convergence de la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^2(4-u_n)$ .

**EXERCICE 6.15 (CORRIGE)**

1) a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+2^{-n})}{2n} = 0$, et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln 2}{2}$ .
2) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\,dx$ .
   a) Calculer $u_0$, puis le terme général $u_n$ pour tout entier n supérieur à 1.
   c) En utilisant les questions précédentes, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## EXERCICE 6.16

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$, $u_1 = \frac{11}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - u_{n-1}}{2}$ pour $n > 1$ .

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement monotone.
3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 + \frac{5}{2^n}$ .
4) En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée.

## EXERCICE 6.17

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. Montrer que pour tout n : $1 \le u_n \le 3$ .

## EXERCICE 6.18

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ .

1) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
2) Montrer que pour tout n : $u_n \ge n$ .
3) Déterminer la limite de $(u_n)$ .

## EXERCICE 6.19

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + x)$ .

On note $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ .

1) Donner un tableau de valeurs approchées à $10^{-2}$ près des termes de la suite d'indices 1, 2, 3, 4, 5 et 10.
2) Tracer, dans un repère orthonormal, la représentation graphique $C_f$ de f et la droite d'équation y = x. Construire les points d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$, en laissant les traits de construction apparents.
3) Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite ?
4) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $u_n$ est positif.
5) Etudier le sens de variation de la fonction *g* définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - x .$$
En déduire que, pour tout réel strictement positif x, on a : $0 < \ln(1+x) < x$ .
Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
6) Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)$ converge et que sa limite est 0.

## EXERCICE 6.20

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 1)^2\ e^{-x}$. On note $g^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de g

1) a) Montrer par récurrence que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x^2 + u_n x + v_n)e^{-x}$ où $u_n$ et $v_n$ sont des nombres réels.

b) Exprimer $u_{n+1}$ et $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et $v_n$.

2) a) Calculer $u_n$ en fonction de n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $v_n = n^2 - 3n + 1$.

En déduire l'expression de $g^{(n)}(x)$, pour tout réel x.

**EXERCICE 6.21**

On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$.

On définit la suite ( $v_n$ ) sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = h(v_n), n \geq 1 \end{cases}$

1) a) Exprimer $h\left(\dfrac{1}{n}\right)$ en fonction de n.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $h\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

2) a) Déterminer h'(x).

b) Quel est le sens de variation de h sur [ 0 ; 1 ] ?

3) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \leq v_p \leq \dfrac{1}{p}$. Justifier que $0 \leq v_{p+1} \leq \dfrac{1}{p+1}$.

b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n}$.

4) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Justifier la réponse.

**EXERCICE 6.22**

Soit la suite ( $I_n$ ) définie pour tout n entier naturel par l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}dx}{e^x+1}$.

1) Calculer $I_1$ et $I_0 + I_1$. En déduire $I_0$.
2) Pour tout entier n>0, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3) Montrer que la suite ( $I_n$ ) est croissante.
4) Prouver que pour tout entier n et tout x de [ 0 ; 1 ] : $\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{2}$.

En déduire un encadrement de $I_n$.

5) A partir de cet encadrement, déterminer les limites de $I_n$ et de $\dfrac{I_n}{e^n}$.

**EXERCICE 6.23**

On considère la suite ($U_n$) définie par récurrence sur N par $U_{n+1} = 0{,}2U_n + 3$ et $U_0 = 5$.

1) Quelle valeur faut il donner aux réels a et b afin que pour n = 0 et n = 1 on ait $U_n = 0{,}2^n a + b$.

2) démontrer que pour ces valeurs, on a pour tout n de N, $U_n = 0{,}2^n a + 2$.

3) Compléter l'algorithme suivant qui automatise le calcul de a et b lorsque la suite est définie par une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = qU_n + r$ et son terme $U_0$, où r est un réel quelconque et q un réel différent de 1.

Algorithme

```
Entrée
        Saisir les réels q, r et u
Traitement
        A  prend la valeur  …..
        B  prend la valeur  …..
Sortie
        Afficher  la  valeur  de a
        Afficher la valeur  de b
```

4) Compléter l'algorithme précédent pour calculer, pour tout entier n désigné, le terme $aq^n + b$.

Cela permet il d'avoir la forme explicite de toute suite arithmético – géométrique ?

# Chapitre VII : PROBABILITES ET LOIS DE PROBABILITE

**EXERCICE 7.1**

Un restaurant propose des repas composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Les clients ont le choix entre 5 entrées, 4 plats et 3 desserts. Calculer le nombre de repas différents possibles.

**EXERCICE 7.2**

Montrer que : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ..... + \binom{n}{n} = 2^n$.

**EXERCICE 7.3**

Démontrer les égalités suivantes par le calcul :

1) Pour p et n entiers positifs avec $p \leq n-2$ : $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.
2) Pour p et n entiers positifs avec $0 \leq p \leq n$ : $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$.

( On pourra d'abord montrer que pour $0 \leq k \leq p \leq n$ : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ )

**EXERCICE 7.4**

Dans une assemblée de 10 personnes, toutes se serrent la main.
Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

**EXERCICE 7.5 (CORRIGE)**

Une urne contient 6 boules blanches, 4 rouges et 5 vertes.

1) On tire simultanément 3 boules de cette urne.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
   c) Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
   d) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule blanche ?
2) Maintenant, on tire les 3 boules successivement en remettant à chaque fois la boule dans l'urne. Répondre aux questions a), b), c) et d) précédentes.

**EXERCICE 7.6**

Une urne contient cinq billets de 200 €, quatre billets de 100 € et deux billets de 50 €. On tire au hasard et simultanément quatre billets de l'urne.

1) Combien y a-t-il de tirages distincts ?
2) Combien y a-t-il de tirages dont la somme des valeurs des billets est 400 €.

**EXERCICE 7.7**

On inscrit sur huit cartons les mots ou groupes de mots suivants : « me font », « mourir », « yeux », « Marquise », « belle », « d'amour », « vos » et « beaux ». Les huit cartons sont placés dans une boîte ; on les tire les uns après les autres, on les place côte à côte à partir de la gauche dans l'ordre de tirage, de façon à former une phrase (avec un sens ou non). Combien peut-on ainsi former de phrases ?

**EXERCICE 7.8**

On dispose de n boules $B_1, B_2, \ldots, B_n$ à placer chacune dans une des n cases $C_1, C_2, \ldots, C_n$ . On dit que la boule $B_i$ est mal placée si elle est placée dans une case $C_j$ avec $i \neq j$. Puis, on dit qu'un placement des n boules dans les n cases contient p dérangements si exactement p boules sont mal placées. Pour $p \leq n$ , on note D(n,p) le nombre de placements possibles de n boules contenant p dérangements. Le but est de déterminer D(n,p). Enfin, on pose D(0,0) = 1.

1) Calculer D(n,0), D(n,1) et D(n,2) en fonction de n.
2) Montrer que : $D(n,p) = \binom{n}{p} D(p,p)$
3) Calculer D(1,1) et D(2,2).
4) Montrer que : $D(n,n) = n\,! - \binom{n}{0} D(0,0) - \ldots - \binom{n}{n-1} D(n-1,n-1)$

**EXERCICE 7.9**

1) Soit A et B deux événements indépendants. Montrer qu'il en est de même pour : A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2) Au tir à l'arc, les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont indépendants et de probabilités respectives $\frac{4}{5}$ et $\frac{7}{8}$. On considère que les deux archers tirent simultanément.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   a) A et B atteignent tous les deux la cible.
   b) Seul A atteint la cible.
   c) La cible a été manquée.
   d) La cible a été atteinte.
   e) Un seul tireur atteint la cible.

**EXERCICE 7.10**

Un dé est lancé 10 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ?

**EXERCICE 7.11**

Dans une ville, 40% de la population a les cheveux blonds, 50% les yeux bleus et 35% les cheveux blonds et les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.
Quelle est la probabilité :

1) pour qu'elle ait les yeux bleus, sachant qu'elle a les cheveux blonds ?
2) pour qu'elle n'ait pas les cheveux blonds, sachant qu'elle a les yeux bleus ?

**EXERCICE 7.12**

Un sac contient douze boules. Sept sont rouges parmi lesquelles trois sont unies et quatre tachetées. Cinq sont blanches parmi lesquelles deux sont unies et trois tachetées. Ces boules sont indiscernables au toucher.

1) Un joueur tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule rouge sachant qu'elle est tachetée ?
2) Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule rouge exactement sachant qu'une des deux boules (au moins) est tachetée ?
3) Un joueur tire deux boules successivement et sans remise. Quelle est la probabilité qu'il tire d'abord une boule tachetée et ensuite une boule unie ?

**EXERCICE 7.13**

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux ».

On note B l'événement : « les deux faces obtenues sont numérotées 6 ».

1) Calculer les probabilités de A et de son événement contraire $\overline{A}$.
2) Calculer $P_A(B)$, puis $P(B \cap A)$.
3) Calculer P(B).
4) Calculer $P_B(A)$, .

**EXERCICE 7.14**

Un sac contient quatre jetons marqués 0, 1, 2 et 3. On tire deux jetons l'un après l'autre et l'on désigne par X la variable aléatoire « plus grand nombre tiré » (n'importe lequel en cas d'égalité). Donner la loi de probabilité de X, l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) dans chacun des cas suivants :

1) Le tirage est effectué sans remise.
2) Le tirage est effectué avec remise.

**EXERCICE 7.15**

On dispose d'une urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Le joueur tire simultanément trois boules.

1) Calculer la probabilité que le joueur sorte 0, 1, 2 ou 3 boules noires.
2) Le joueur gagne 5 € par boule noire obtenue. Soit X la variable aléatoire désignant le gain du joueur. Calculer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

**EXERCICE 7.16**

On peint 6 faces d'un cube de bois d'arête trois centimètres. On le débite, par des coups de scie parallèles aux plans des faces, en 27 petits cubes d'arête un cm. On place ces 27 petits cubes dans un sac. On tire au hasard et sans remise deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

**EXERCICE 7.17**

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
X est la variable aléatoire qui prend le valeur 1 si une dame est tirée, 0 dans le cas contraire.
Y est la variable aléatoire qui prend le valeur 1 si un cœur est tiré, 0 dans le cas contraire.
Soit les événements : A : « la carte tirée est la dame de cœur ».
B : « la carte tirée est une dame qui n'est pas de cœur »
C : « la carte tirée est un cœur qui n'est pas une dame ».

1) Déterminer la loi de probabilité de X et celle de Y.
2) Calculer les probabilités P(A), P(B) et P(C) et en déduire la loi de probabilité conjointe du couple (X,Y). Présenter les résultats sous forme d'un tableau.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

**EXERCICE 7.18 (CORRIGE)**

On lance cinq dés simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux 1 ?

**EXERCICE 7.19**

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules noires.
On admettra que tous les tirages éventuels sont équiprobables et on exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1) On tire simultanément 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements :
   a) « on a tiré 2 boules rouges. »
   b) « on a tiré 2 boules de même couleur. »
2) On répète six fois l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne en remettant les boules dans l'urne après l'épreuve (les épreuves successives sont donc indépendantes).
   On considère comme un succès le tirage de 2 boules rouges à une épreuve.
   Soit X la variable aléatoire «nombre de succès obtenus au cours des six épreuves».
   a) Quelle est la formule donnant, en fonction de k, la probabilité de l'événement (X = k) où k est un entier ?
   b) Quels sont l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X ?

**EXERCICE 7.20 (CORRIGE)**

Un jeu comporte 16 cartes : 4 valets, 4 dames, 4 rois et 4 as. L'épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux cartes du jeu et à les remettre dans le jeu après avoir noté les cartes tirées.

1) On effectue une épreuve. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux as ?
2) On répète trois fois l'épreuve, on suppose que les tirages sont indépendants. Un joueur met une mise de 5 F.
   S'il n'obtient pas deux as, il perd sa mise.
   S'il obtient 1 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 10 F.
   S'il obtient 2 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 50 F.
   S'il obtient 3 fois deux as, on lui rembourse sa mise, plus 100 F.
   Soit X la variable aléatoire définie par le gain algébrique du joueur après 3 tirages.
   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X.
3) Ce jeu est-il donc favorable au joueur ?

## EXERCICE 7.21

Un dé cubique a quatre faces blanches et deux faces noires. Quand on le lance, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

A) On lance ce dé une fois. Quelle est la probabilité d'avoir :
   1) une face supérieure blanche ?
   2) une face supérieure noire?

B) On répète cette épreuve cinq fois de suite, les lancers étant indépendants.
   1) a) Quelle est la probabilité pour qu'une face noire apparaisse exactement une fois ?
      b) Quelle est la probabilité pour qu'une face noire apparaisse au moins une fois ?
   2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de faces noires sorties.
      Quelle est la loi de probabilité de X et son espérance mathématique ?

## EXERCICE 7.22

Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1 et les autres le numéro 3. On tire simultanément trois jetons du sac et on appelle A l'événement « la somme des numéros sortis est strictement inférieure à 7 »

1) Calculer la probabilité de l'événement A.
2) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés. Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise exactement trois fois ? Au moins trois fois ?

## EXERCICE 7.23

On a rangé en vrac, dans une boîte, neuf cartes postales indiscernables au toucher. Cinq de ces cartes proviennent de France, une provient d'Australie et trois des USA.

1) On tire simultanément et au hasard trois cartes de la boîte.
   a) Démontrer que la probabilité de n'obtenir aucune carte de France parmi les trois cartes tirées est égale à $\frac{1}{21}$.
   b) Calculer la probabilité des événements $E_1$ : « lors d'un tirage, on obtient une carte de chaque pays » et $E_2$ : « lors d'un tirage, on obtient au moins une carte de France ».
   c) X est la variable aléatoire comptant, pour chaque tirage de trois cartes, le nombres de cartes de France obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X (les résultats seront regroupés dans un tableau sous forme de fractions irréductibles).
2) On répète ce tirage 5 fois de suite en remettant à chaque fois les 3 cartes tirées dans la boîte.
   a) Quelle est la probabilité de l'événement $E_3$ : « lors de ces 5 tirages, on obtient deux fois seulement aucune carte de France » ?
   b) On répète n fois de suite ce tirage en remettant à chaque fois les trois cartes tirées dans la boîte. A partir de quelle valeur de n la probabilité d'obtenir au moins 1 tirage sans carte de France est-elle supérieur ou égale à 0,95 ?

## EXERCICE 7.24

Vous arrivez à un arrêt de bus à 10 heures sachant que le bus arrivera à un certain instant qui suit la loi uniformément distribuée entre 10 h et 10 h 30.

1) Quelle est la probabilité que votre attente dure dix minutes ou plus ?
2) Si à 10 h15, le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que votre attente dure au moins 10 minutes supplémentaires ?

## EXERCICE 7.25

Montrer que la fonction f est la densité d'une loi de probabilité P et calculer la probabilité de l'événement A :

1) $I = [\,0, 1\,]$ avec $f(x) = 2\,x$ et $A = [\,\frac{1}{5}\,;\frac{4}{5}\,]$
2) $I = [\,0, n\,]$ ($n > 0$, entier) avec $f(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ et $A = [\,0\,,a\,]$ ( $0 \leq a \leq n$)
3) $I = [\,-1, 1\,]$ avec $f(x) = 1- |x|$ et $A = [\,a\,,b\,]$ ($-1 \leq a < b \leq 1$)

## EXERCICE 7.26

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle.

1) Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(X \leq 80) = 0{,}05$.
2) En déduire $P(X = 20)$ et $P(X > 20)$.

## EXERCICE 7.27

Soit $\theta$ un réel strictement positif.

1) Soit u un réel appartenant à $[\,0\,,1\,]$. On pose $x = -\frac{\ln(1-u)}{\theta}$. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et que pour tout réel $a \geq 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes : $x \leq a$ et $u \leq 1 - e^{-\theta a}$.
2) En déduire que, si la variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[\,0\,,1\,]$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{\ln(1-U)}{\theta}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\theta$.
3) Construire un échantillon de 100 nombres distribués selon la loi exponentielle de paramètre 2, en simulant le tirage de 100 nombres au hasard dans $[\,0\,,1\,]$.

# Chapitre VIII : LOI NORMALE ET ESTIMATION

**EXERCICE 8.1**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite. Calculer à l'aide d'une calculatrice :
P ( - 1,5 $\leq X \leq 1,5)$ ; P ( X < 0,75 ) ; P ( 0,1 $\leq X \leq 0,3)$ et P ( X > -0,75 ).

**EXERCICE 8.2**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite. En utilisant le résultat ci-après P (X < 1) = 0,84, calculer les probabilités :
P ( X $\leq 1$ ) ; P ( X > 1 ) ; P ( X $\leq -1)$ et P ( 0 $\leq$ X $\leq$ 1 ).

**EXERCICE 8.3**

Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi normale N ($\mu; \sigma^2$ ) et X une variable aléatoire centrée et réduite.
En utilisant les résultats de la variable X, Calculer en justifiant tes réponses les probabilités ci-après :
P ( $\mu-\sigma \leq Y \leq \mu+\sigma)$; P ($\mu-2\sigma \leq Y \leq \mu+2\sigma$ )
P ($\mu-3\sigma \leq Y \leq \mu+3\sigma)$ .

**EXERCICE 8.4**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathrm{N}(0;1)$. On donne $P(X \leq 1) = 0,84$ et $P(X \leq 2) = 0,98$. On rappelle les axiomes suivants : la probabilité d'un événement impossible vaut 0, tandis que la probabilité d'un événement certain vaut 1. Calculer sans calculatrice les probabilités suivantes :

1. $P((X \leq 1) \cup (X > 2))$ ;
2. $P((X \leq 1) \cap (X > 2))$ ;
3. $P((X \leq 1) \cap (X \leq 2))$ ;
4. $P((X > 1) \cup (X \leq 2))$ ;
5. $P((X < -2) \cup (X > 1))$ ;
6. $P((1 < X \leq 2)$ ;
7. $P((-2 < X \leq 1)$ .

**EXERCICE 8.5**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Donner $x$ tel que $P(X \le x) = 0{,}8$.
2. Donner $x$ tel que $P(X \ge x) = 0{,}8$.
3. Donner $x > 0$ tel que $P(-x \le X \le x) = 0{,}8$.

**EXERCICE 8.6**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ où $\sigma > 0$. Centrer et réduire pour déterminer sans calculer $P(|X| > 3)$ lorsque :

1. $\sigma = 1$ ;
2. $\sigma = 2$ ;
3. $\sigma = 3$.

**EXERCICE 8.7**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. On donne $P(X \le 1) = 0{,}84$ et $P(X \le 2) = 0{,}98$. On rappelle les axiomes suivants : la probabilité d'un événement impossible vaut 0, tandis que la probabilité d'un événement certain vaut 1. Calculer sans calculatrice les probabilités suivantes :

1. $P(X < 10)$ pour $X$ suivant la loi $\mathcal{N}(8;4)$ ;
2. $P(X \ge 0)$ pour $X$ suivant la loi $\mathcal{N}(-5;25)$ ;
3. $P(X < 0)$ pour $X$ suivant la loi $\mathcal{N}(5;25)$ ;
4. $P(1 < X < 5)$ pour $X$ suivant la loi $\mathcal{N}(5;16)$ ;

**EXERCICE 8.8**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(-4;10)$ et $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Soit $x \in R$, montrer que $P(X \le x) = P\left((Z \le \frac{x+4}{\sqrt{10}})\right)$.
2. En déduire le réel tel que $P(X \le x) = 0{,}95$.

**EXERCICE 8.9**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ et $Z$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Monter que pour tout,

$$P(-10 < X < 10) = P\left(\frac{-10}{\sigma} < Z < \frac{10}{\sigma})\right).$$

2. Donner le réel $x > 0$ tel que :

   $P(-x < Z < x) = 0{,}95$.
3. En déduire la valeur de $\sigma$, $\sigma > 0$ telle que :

   $P(-10 < X < 10) = 0{,}95$.

**EXERCICE 8.10**

Une machine industrielle est capable de produire des pièces métalliques de longueur $X$ (en centimètres) suivant une loi suivante $\mathrm{N}(\mu;1)$. Le caractère aléatoire de $X$ et notamment sa variance $\sigma^2 = 1$ reflètent les imprécisions de fabrication. On souhaite régler la machine, autrement dit $\mu$, pour qu'elle produise des pièces de longueur comprise entre 99 et 101 centimètres avec la probabilité la plus grande possible. Pour tout $\mu \in R$, on pose :

$g(\mu) = P(99 \leq X \leq 101)$.

1. Soit $Z = X - \mu$. Quelle loi suit la variable aléatoire $Z$ ?
2. Exprimer $g(\mu)$ en fonction de la variable $Z$.
3. Soit la fonction F définie pour tout $x$ par $F(x) = \int_{100}^{x} f(t)dt$, où $f$ désigne la densité de $Z$. Déterminer la dérivée de $F$ en fonction de $f$.
4. Exprimer, pour tout, $\mu, g(\mu)$ en fonction de $F$.
5. En déduire $g'(\mu)$ pour tout $\mu$.
6. Etablir le tableau de variation de $g$.
7. En déduire la valeur de $\mu$ qui maximise $P(99 \leq X \leq 101)$. Que vaut cette probabilité maximale ?

**EXERCICE 8.11**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi B(n ; p) où n est un entier naturel et p $\in$ ]0 ;1[.
On pose F = $\frac{X}{n}$.
1) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique de F à 90%, à 95% et à 99%.
2) Sous quelles conditions sur n et p peut-on utiliser ces intervalles en pratique ?

**EXERCICE 8.12**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi B (60 ;0,4) et F = $\frac{X}{60}$.

1) Justifier que les conditions pratiques d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont réunies.

2) En utilisant cette approximation, montrer que F fluctue à 95% dans l'intervalle [0,28 ; 0,52].
3) Montrer de la même manière que F fluctue à 99% dans l'intervalle [0,24 ; 0,56].

**EXERCICE 8.13**

Selon l'INSEE, environ 51% de la population française active ayant un emploi appartient à la catégorie socio professionnelle (CSP) « employés et ouvriers ». Au concours d'entrée à l'ENA en 2009, 17 admis sur 81 ont des parents appartenant à cette CSP.
1) Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence d'apparition de la CSP « employés et ouvriers » dans un échantillon de 81 français tirés aléatoirement avec remise ?
2) Peut-on considérer que les admis d'origine socio professionnelle « employés et ouvriers » sont sous représentés à l'ENA ? On comparera leur proportion à intervalle de fluctuations précédent.

**EXERCICE 8.14**

1) Dans un certain pays, en 1980, la proportion de femmes vivant au-delà de 75 ans était, d'après un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, 60%.
Celle des hommes, pour un échantillon de même taille, était 53%.
Peut-on dire, au niveau de confiance 0,95 , qu'en 1980, il y avait une différence significative pour l'espérance de vie des hommes et des femmes ?
2) Trente ans plus tard, sur des échantillons de même taille, la proportion de femmes vivant au-delà de 77ans est 60%, et celle des hommes vivant au-dessus de 77 ans est 57%.
Peut-on dire, au niveau de confiance 0,95, qu'en 2010 il y a une différence significative pour l'espérance de vie des hommes et des femmes ?
3) Avancer des raisons qui peuvent justifier cette différence.

**EXERCICE 8.15**

Un groupe d'assurances s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif. On considère un échantillon de 100 véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.
1) Donner une estimation du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
2) Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p au niveau de confiance asymptotique de 95%.

**EXERCICE 8.16**

Au cours d'une année, le service ophtalmologie d'un centre hospitalier a examiné 5 000 patients. Pour chaque patient, une fiche a été remplie sur laquelle est notamment indiqué le diagnostic posé. Parmi les pathologies rencontrés chez ces patients figure l'aniséïconie (aniséïconie se définie comme la perception d'images différentes en taille et/ou en forme par les deux yeux fixant un même objet). On considère un échantillon de 60 fiches prélevées au hasard dans le fichier des patients. Le nombre de fiches est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 15 fiches de cet échantillon signalent une aniséïconie.

1) Proposer une estimation naturelle de la proportion inconnue p des fiches du fichier qui signalent une aniséïconie.
2) Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance asymptotique 95%.

# Chapitre IX : LES NOMBRES COMPLEXES

**EXERCICE 9.1**

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
(i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \theta \end{cases} \text{à } 2\pi \text{ près} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

(ii) Pour tous nombres réels a et b on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin a$$

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations : $\begin{matrix} |Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2| \\ \arg(Z_1 Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2) \end{matrix}$ à $2\pi$ près.

**EXERCICE 9.2**

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si, $z = -\bar{z}$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\bar{z} = |z|^2$.

**EXERCICE 9.3**

On pose $\alpha = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $\beta = \dfrac{3+i}{5-7i}$.

Montrer que $\alpha + \beta$ est un réel et que $\alpha - \beta$ est un imaginaire pur.

**EXERCICE 9.4**

On donne le nombre complexe $z = \dfrac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$.

1) Écrire z sous forme algébrique.
2) Calculer le module et l'argument de z.

**EXERCICE 9.5**

Mettre sous la forme « a + i b » les nombres complexes suivants :

1) $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$ 2) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ 3) $i + \dfrac{1}{i}$

**EXERCICE 9.6**

Déterminer le module et un argument des nombres complexes ci-après :

$-1$ ; $4$ ; $-3i$ ; $2-2i$ ; $\sqrt{3}+i$ ; $\sqrt{3}-3i$

**EXERCICE 9.7**

$z$ et $z'$ sont deux complexes tels que : $z\overline{z} = z'\overline{z'} = 1$ et $z\,z' \neq -1$.

Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

**EXERCICE 9.8**

Soit z un nombre complexe. Montrer que si $\left|\dfrac{1-iz}{1+iz}\right| = 1$, alors z est réel.

**EXERCICE 9.9**

Soient les nombres complexes $u = 2 + 2\,i\,\sqrt{3}$ et $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de u, v et uv. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

**EXERCICE 9.10**

Soient les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1-i$.

1) Mettre sous forme trigonométrique $z_1$, $z_2$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

   En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2$.

   Résoudre cette équation dans l'ensemble des réels. Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

**EXERCICE 9.11**

En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument de chacun des quotients :

1) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ 2) $\dfrac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$ 3) $\dfrac{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

## EXERCICE 9.12 (CORRIGE)

Soient les nombres complexes $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .

Ecrire sous forme trigonométriques les complexes : $z_1$ , $z_2$ , $z_1 z_2$ , $\frac{z_1}{z_2}$ et $z_1^3$ .

## EXERCICE 9.13

Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ , $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ .

On pose $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1) Ecrire $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
2) En déduire une forme exponentielle de Z.
3) Calculer alors la forme algébrique de Z.

## EXERCICE 9.14 (CORRIGE)

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 + (4i-6)z^2 + (13-24i)z + 52i$ .

1) Montrer que ce polynôme admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
2) Factoriser P(z).
3) Résoudre l'équation P(z) = 0 dans l'ensemble des complexes.

## EXERCICE 9.15

Aux coordonnées (a ; b) d'un point M du plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on associe l'équation (E) d'inconnue complexe z : $z^2 - 2az + b = 0$ .

1) Résoudre (E) si M a pour coordonnées (2,4) puis si M a pour coordonnées (1,5).
2) Trouver et représenter dans P :
   - l'ensemble des points M tels que l'équation (E) admette une solution double.
   - l'ensemble des points M tels que l'équation (E) admette deux solutions non réelles.

## EXERCICE 9.16

Soit a un nombre complexe non nul et soit j tel que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que les trois points d'affixes respectives a, ja et $j^2a$ sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

## EXERCICE 9.17

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (1 - i)z^2 - (2 - 2i)z + 8 = 0$ .

1) a) Vérifier que 1 + i est une solution de (E).
   b) Montrer que (E) admet une solution réelle.
   c) Achever la résolution de (E).
2) Soient A, B et C les images dans le plan complexe des solutions de (E). Construire ces points et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

## EXERCICE 9.18

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe $4 + 2i$ , B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z . Soit le nombre complexe $Z = \dfrac{z-4-2i}{z+2+i}$ .

1) Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
2) Préciser la nature puis construire :
   - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$ .
   - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 2$ .
   - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un réel positif.
   - l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un imaginaire pur.

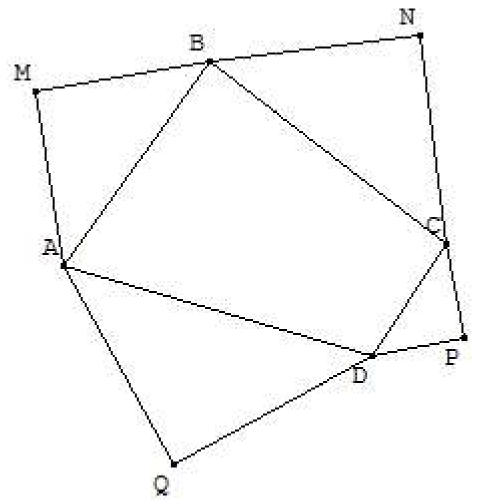
## EXERCICE 9.19 (CORRIGE)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6\cos(\frac{\pi}{6})z + 9 = 0$

   Déterminer le module et un argument des solutions $z_1$ et $z_2$, puis donner l'écriture exponentielle de $z_1$ et $z_2$.
2) Placer dans la plan P rapporté à un repère orthonormal direct, d'unité graphique 1 cm, les images $M_1$ et $M_2$ de $z_1$ et $z_2$. Expliquer pourquoi $M_1$ et $M_2$ sont situés sur le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 3.

## EXERCICE 9.20

Dans la configuration ci-contre, les triangles MAB, NBC, PCD et QDA sont des rectangles isocèles de sens direct en M, N, P et Q.




1. Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D.

2. Montrer que MP = NQ et que $\overrightarrow{MP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{NQ}$.

3. Soient K, L, U et V les milieux respectifs de [AC], [BD], [MP], et [NQ]. Notons k, l, u et v leurs affixes respectives.

a) Exprimer m + p et n + q en fonction de k et l.

b) En déduire que MNPQ est un parallélogramme si et seulement si, ABCD est un parallélogramme.
c) On suppose que ABCD n'est pas un parallélogramme.
Comparer $u + v$ et $k + 1$ puis $u - v$ et $i( 1 - k )$.
Que peut on en déduire pour le quadrilatère ULVK ?

**EXERCICE 9.21**

Les points A, B, C et D ont pour affixe $3 + i$, $7 - i$, $-1 - 7i$ et $8 - 4i$ respectivement.

1) Placer les points A, B, C et D. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Démontrer que A, B, C et D sont sur un même cercle, dont on précisera le rayon et l'affixe de son centre I.
3) A tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{10}{z} i$.
a) Ecrire sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A', B', C' ( respectivement associés à A, B, C ). Placer les points A', B', C'.

b) Vérifier que : $c' - a' = 2 ( b' - a' )$.

Que peut on déduire pour les points A', B', C' ?

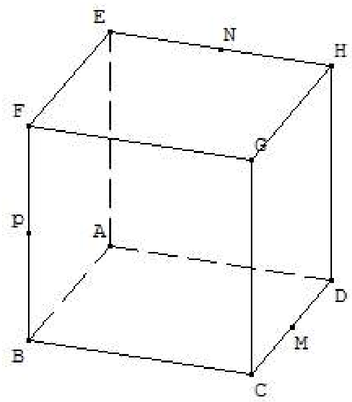
# Chapitre X : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

**EXERCICE 10.1**

SABCD est une pyramide à base carrée. Le point O est le centre du carré ABCD.
1) Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SBC) ?
2) Quelle est l'intersection des plans (SAC) et (SBD) ?
3) Quelle est la position relative des droites (SB) et (AC) ?
4) Quelle est l'intersection des plans (SAB) et (SCD) ?

**EXERCICE 10.2**

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les points M, N et P sont les milieux respectifs des arêtes [CD], [EH] et [FB].
Dans chacun des cas, donner (en justifiant) les positions relatives demandées :
a. Les droites (MN) et (GH).
b. Les droites (MP) et (DF).
c. La droite (NP) et le plan (CDG).
d. La droite (EM) et le plan (BFG).
e. Les plans (AMN) et (BCG).
f. Les plans (MPG) et (ADE).

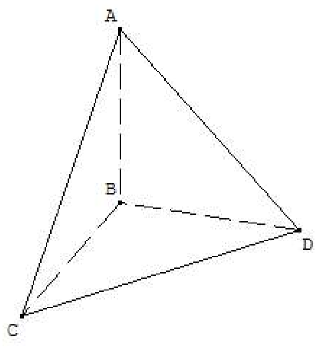



**EXERCICE 10.3** (REPONDEZ PAR VRAI OU FAUX)

1) Trois droites concourantes sont coplanaires.
2) Deux droites parallèles à un même plan, sont parallèles entre elles.
3) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
4) Une droite et un plan parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
5) Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles entre elles.
6) Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.
7) Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.

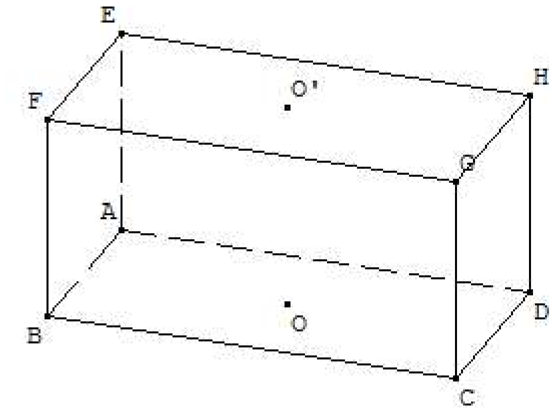
**EXERCICE 10.4**

La figure ci-contre représente un tétraèdre possédant trois faces en forme de triangle rectangle : les faces ABC, ABD et BCD.
Démontrer les orthogonalités suivantes :
a. La droite (AB) et le plan (BCD).
b. Les droites (CD) et (AB).
c. Les droites (BC) et (AD).



## EXERCICE 10.5

On considère le parallélépipède ABCDEFGH et les points O et O' centre respectifs des faces ABCD et EFGH.
a. Démontrer que la droite (AE) est parallèle au plan (BFH).
b. Démontrer que la droite (EH) est parallèle au plan (BFG).
d. Démontrer que les droites (BF) et (OO') sont parallèles.




## EXERCICE 10.6

On considère un tétraèdre ABCD, de sommet A, les points I et J appartiennent respectivement aux arêtes [AB] et [AC] de manière à ce que (IJ) ne soit pas parallèle à (BC).
a. Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD)
b. En déduire l'intersection des plans (DIJ) et (BCD).
c. Que devient cette intersection si la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).

## EXERCICE 10.7

Dans l'espace on considère les points A, B, C, D et E vérifiant les relations :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Déterminer la valeur du réel $\alpha$ pour que les points A, D et E soient alignés ?

## EXERCICE 10.8

On considère les points A, B, C et D non coplanaires dans l'espace et on définit les points E et F par les relations : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les points D, E, F et G sont coplanaires.

## EXERCICE 10.9

On considère les droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = -s \\ z = -1 + s \end{cases}$$

a. Montrer que (d) et (d') ne sont pas parallèles.
b. Donner deux points A et B de la droite (d).
c. donner deux points C et Dde la droite (d').
d. Montrer que les points A, B, C et Dne sont pas coplanaires.
e. Que peut-on en déduire pour les deux droites ?

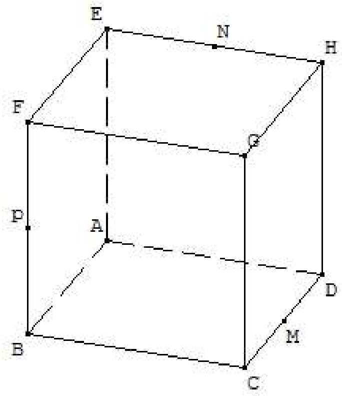
**EXERCICE 10.10**

Dans le cube ABCDEFGH muni du repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$, déterminer les coordonnées dans chacun des cas suivants :

a. des points B, E , F et G.

b. Des vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BH}$.

e. Du centre Ω du cube.




**EXERCICE 10.11**

On considère les trois droites dont les représentations paramétriques sont :

$$(d_1)\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=2+2t \end{cases} \qquad (d_2)\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2t \\ z=-5-4t \end{cases} \qquad (d_3)\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$$

a. Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

b. Ces droites sont elles coplanaires ? (Justifier)

**EXERCICE 10.12**

On considère les deux droites dont les représentations paramétriques sont :

$$(d_1)\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=4+3t \end{cases} \qquad (d_2)\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=8+3t \end{cases}$$

Démontrer que ces deux droites ne sont pas coplanaires.

**EXERCICE 10.13**

On considère les points A ( 2 ; 3 ; -1), B ( 1 ; 3 ; 4 ), C( 0 ; 1 ; -3 ), D( 2 ; 0 ; 0 ) et E ( -2 ; -2 ; 8).

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

b. Peut on trouver deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ?

c. Que peut on en déduire pour la droite (DE) ?

**EXERCICE 10.14**

Construire un algorithme qui répondra à la question suivante : les points A, B et C de l'espace sont ils alignés ?

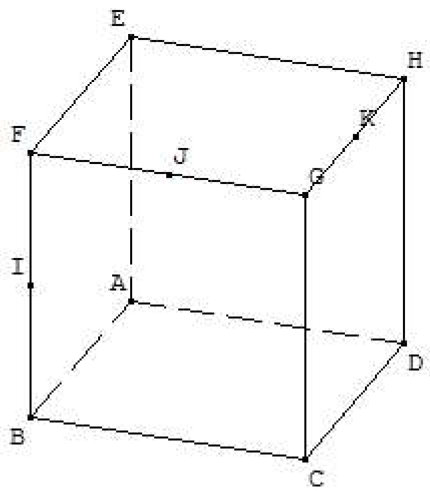
**EXERCICE 10.15**

Soit ABCDEFGH un cube de côté *a* et les points I,J et K, milieux respectifs de [BF], [FG] et [GH]. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$ 2) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AI}$ 3) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AI}$

4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}$ 5) $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{DC}$ 6) $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BI}$

Le point K n'est pas utilisé ici. On pourra changer le 6) par le produit scalaire des vecteurs HB et HK




**EXERCICE 10.16**

On considère les points A (0 ; -1 ; 1), B(4 ; -2 ; 3) et C(-1 ; 2 ; -3).

a. calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

b. Déterminer une valeur approchée à 0,1 degré près des angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ *et* $\widehat{ACB}$.

**EXERCICE 10.17**

On considère les points A(0 ; -1 ; 3) et B(-1 ; 2 ; 5).

Montrer que le point H(1 ; -4 ; 1) est le projeté orthogonal du point C(5 ; -2 ; 0) sur la droite (AB).

**EXERCICE 10.18**

On considère les points A(-1 ; 0 ; 2), B(1, 1, 3), C(-2 ; 1 ; 4) et D(0 ; 1 ; 0)

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (CD).

c. Leurs vecteurs directeurs sont ils orthogonaux ?

d. Démontrer que ces deux droites sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

**EXERCICE 10.19**

On considère les ponts A (-1 ; 1 ; 3 ), B ( 2 ; -1 ; -2) , C (0 ; 1 ; -4 ) et D(2 ; -1 ; -2).

a. Donner une équation paramétrique de la droite (AB).

b. Donner une équation paramétrique de la droite (CD).

c. Démontrer que ces deux droites sont perpendiculaires et déterminer leur point d'intersection.

**EXERCICE 10.20**

On donne les équations cartésiennes de plusieurs plans, déterminer ceux qui sont parallèles et ceux qui sont perpendiculaires.

(P) $-x + 2y + z - 3 = 0$ et (P') $x - 2y + z + 3 = 0$

(Q) $x - 2y - z = 0$ et (Q') $-2x + y + 4z - 1 = 0$

(R) $2x + 3y - 4z + 2 = 0$ et (R') $x - 2y + z - 1 = 0$

**EXERCICE 10.21**

On considère les points A(0 ; 0 ; 1), B(-2 ; -4 ; 1) et C(-2 ; 1 ; -1).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$

**EXERCICE 10.22**

On donne les points A(1 ; 5 ; 0), b(2 ; 0 ; -1) et C(0 ; 3 ; 4).

a. déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

**EXERCICE 10.23**

Montrer que les plans (P) et (P') ci-dessous sont sécants et déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection.

a. (P) : $2x - 3y + z - 4 = 0$ et (P') : $x + 2y - z + 1 = 0$.

b. (P) : $x + y + z - 4 = 0$ et (P') : $x + y + z = 8$

**EXERCICE 10.24**

Résoudre ces systèmes composés de trois équations de plans et déterminer la nature de leur intersection

1) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 5y + 13z = 3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 8 \\ 5x + y - z = 16 \\ 6x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 8x + 5y - 2z = 0 \\ -7x - 6y + 5z = 8 \end{cases}$

**EXERCICE 10.25**

On considère une droite (d) passant par le point A(a ; b ; c ) et de vecteur directeur $\vec{u}(m; n; p)$, ainsi qu'un point P ( x ; y ; z ).

On appelle distance de P à D le minimum de la longueur PM lorsque le point M décrit la droite (d).

1) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (d).

2) Calculer l'expression de la distance MP pour un point M quelconque de (d).

3) on considère l'algorithme suivant :

*Initialisation*

*T = 0*

*R = 0*

*Entrées*

*Donner les valeurs de a, b, c, m, n, p, x, y, z.*

*Traitement*

*Donner à I la valeur* $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

*Donner à D la valeur :*

$(x-a-rm)^2+(y-b-rn)^2+(z-c-rp)^2$

*Si D > 1 alors remplacer r par – r*

*Fin Si*

*Tant que D < I faire*

*Donner à t la valeur t + 1*

*Donner à I la valeur D*

*Donner à D la valeur* $(x-a-tm)^2+(x-b-tn)^2+(x-c-tp)^2$

*Fin tant que*

*Sortie*

*Afficher* $\sqrt{I}$

Que fait calculer cet algorithme aux lignes (1) et (2) ?
Expliquer la méthode utilisée pour obtenir une valeur approchée de la distance de P à (d).
Que peut-on craindre avec cette méthode ?

**EXERCICE 10.26**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère :
Les points A (0 ; 0 ; 3) , B (2 ; 0 ; 4), C(-1 ; 1 ; 2) et D(1 ; -4 ; 0).
Les plans $(P_1)$ : $7x + 4y - 3z + 9 = 0$ et $(P_2)$ : $x - 2y = 0$.
Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs :

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-8+2t \\ z=-10+5t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x=7+2t' \\ y=8+4t' \\ z=8-t' \end{cases} \text{ avec } t' \in \mathbb{R}.$$

1. Le plan $(P_1)$ est :
a) le plan (ABC) ; b) le plan (BCD) c) le plan (ACD) d) le plan (ABD).

2. La droite $(d_1)$ contient :
a) le point A ; b) le point B ; c) le point C ; d) le point D.

3. position relative de $(P_1)$ et de $(d_1)$ :
a) $(d_1)$ est strictement parallèle à $(P_1)$ ; b) $(d_1)$ est incluse dans $(P_1)$ ;
c) $(d_1)$ coupe $(P_1)$ ; d) $(d_1)$ est orthogonale à $(P_1)$ .

4. Position relative de $(d_1)$ et $(d_2)$.
a) $(d_1)$ est strictement parallèle à $(d_2)$ ; b) $(d_1)$ et $(d_2)$ sont confondues ;
b) $(d_1)$ et $(d_2)$ sont sécants ; c) $(d_1)$ et $(d_2)$ sont non coplanaires.

5. L'intersection de $(P_1)$ et de $(P_2)$ est une droite de représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

## EXERCICE 10.27

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Pour chacune des propositions suivantes, démontrer si elle est vraie ou fasse. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = -3t - 1 \end{cases}$, t ∈ R est parallèle au plan dont une équation cartésienne est x + 2y + 2z – 3 = 0.
2. Les plans (P), (P'), (P'') d'équations respectives x – 2y + 3z = 3, 2x + 3y -2z = 6 et 4x – y + 4z = 12 n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$, t ∈R et $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}$, u ∈ R sont sécantes.
4. On considère les points A(-1 ; 0 ; 2), B(1 ; 4 ; 0) et C( 3 ; -4 ; -2). Le plan (ABC) a pour équation
x + z = 1.
5. On considère les points A(1 ; -1 ; 3), B(2 ; 1 ; 0) et C (4 ; -1 ; 5). Les points A, B et C sont alignés.

## EXERCICE 10.28

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ROC

On désigne par a, b, c et d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul. On appelle (P) le plan d'équation ax + by + cz + d = 0.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P), c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan (P).

QCM

Pour chaque question, déterminer la bonne réponse.
On désigne par (P) le plan d'équation cartésienne 2x – y + 3z = 0 et par A et B les deux points du plan (P) de coordonnées respectives (1 ; 2 ; 0) et (0 ; 3 ; 1).
1. Soit C, D et E les points de coordonnées respectives (1 ; 1 ; - 1), (-1 ; 4 ; 2) et (1 ; 5 ; 1).

a. Les points A, B, C définissent le plan (P).
b. Les points A, B, D définissent le plan (P).
c. Les points A, B, E définissent le plan (P).

2. La droite (D) est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$, t ∈ R.

a. la droite (D) est perpendiculaire au plan (P).
b. la droite (D) est strictement parallèle au plan (P).
c. la droite (D) est incluse dans le plan (P).

3. Soit (S) la sphère de centre O, de coordonnées (2 ; 5 ; 1) et de rayon $\frac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère (S) et au plan (P) est :
a. vide ;
b. constitué d'un seul point ;
c. un cercle.
On donne pour cette question la formule suivante :
La distance du plan (P) d'équation ax + by + cz + d = 0 au point O ($x_o$ ; $y_o$ ; $z_o$) est :

$$D_{p,O} = \frac{|ax_O + by_O + cz_O + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**EXERCICE 10.29**

**Partie A**
On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par le point I le milieu du segment [AD].
1. Démontrer que pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire que l'ensemble (E) des points M de l'espace est tel que : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$.

**Partie B**
Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :
A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 6 ; 0), C(0 ; 0 ; 4) et D(-5 ; 0 ; 1).
1. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
b. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$, orthogonale au plan (ABC) passant par le point D.
b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
c. Calculer la distance du point D au plan (ABC) (cette distance est la distance DH).
d. Démontrer que le point H appartient à l'ensemble € défini dans la partie A.

**EXERCICE 10.30**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points A (-2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; -1) et C(-2 ; 2 ; 2).

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ , puis les longueurs AB et AC.
b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $BAC$ .
c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est 2x – y + 2z + 2 = 0.
3. Soit ($P_1$) et ($P_2$) les plans d'équations respectives :
X + y – 3z + 3 = 0 et x – 2y + 6z = 0.
Montrer que les plans ($P_1$) et ($P_2$) sont sécants selon une droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$, t ∈ R.
4. Démontrer que la droite (D) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit S la sphère de centre O(1 ; -3 ; 1) et de rayon r = 3.
a. Donner une équation cartésienne de la sphère S.
b. Etudier l'intersection de la sphère S et de la droite (D).
c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

# Chapitre XI : ARITHMETIQUE ( SPECIALITE)

**EXERCICE 11.1 (CORRIGE)**

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne par 7 ?
2) Dans la division euclidienne par 7, l'entier relatif m a pour reste 4, l'entier relatif n a pour reste 5. Quels sont les restes de $m + n$ , $m \times n$ , $m^2$ et $n^3$ ?

**EXERCICE 11.2**

Déterminer l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs suivants :

50 , -12 , -56 , 63 , -8 , -75

**EXERCICE 11.3**

1) Déterminer les restes des divisions euclidiennes par 7 de 3 ; $3^2$ ; $3^3$ ; $3^4$ ; $3^5$ ; $3^6$.
2) En remarquant que $10 = 7 + 3$, déterminer la suite des restes des divisions euclidiennes par 7 des puissances entières de 10.
3) Parmi les entiers naturels suivants, indiquer ceux qui sont divisibles par 7 :
   2 922 ; 17 633 ; 24 841 ; 1 097 894.

**EXERCICE 11.4**

1) a) Déterminer toutes les valeurs possibles du reste de la division de $n^4$ par 5.
   b) En déduire que pour tout entier relatif n, si 5 ne divise pas n, alors 5 divise $n^4 - 1$.
   c) Démontrer que quel que soit l'entier relatif n, 10 divise $n^5$-n.
2) a) Soient deux entiers relatifs a et b. Développer $(a + b)^5$.
   b) En déduire que quels que soient les entiers relatifs a et b, $(a + b)^5$ et $a^5 + b^5$ ont le même reste dans la division euclidienne par 5.
   c) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que le reste de la division de $n^5 + 101^5$ par 5 soit égal à 2.

**EXERCICE 11.5**

Montrer que si p est impair, la somme de p nombres consécutifs est un multiple de p.

**EXERCICE 11.6 (CORRIGE)**

Déterminer les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions des équation suivantes :

1) $x.y = - 6$
2) $x^2 - y^2 = 15$
3) $x^2.y + x.y^2 = 12$

**EXERCICE 11.7**

Soit n un entier naturel. Soient a et b définis par : $a = 6n + 5$ et $b = 8n + 3$ .
Prouver que 1 et 11 sont les seuls diviseurs positifs possibles communs à a et b.

**EXERCICE 11.8**

1) La différence de deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces nombres ?
2) La somme de deux entiers naturels est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces nombres ?

**EXERCICE 11.9**

En utilisant les propriétés des congruences, déterminer le reste de la division euclidienne par 13 de chacun des entiers suivants : 100 , 27 , 127 , 2700 , $100^4$ , 274 et $27^{2004}$ .

**EXERCICE 11.10**

Soit a et n deux entiers naturels ( $n \geq 2$) tels que $a \equiv 1 [ n ]$ .

1) Montrer que pour tout diviseur positif d de n, $a \equiv 1 [ d ]$ .
2) Montrer que pour tout k entier naturel, $a^k \equiv 1 [ n ]$ .
3) Montrer que $\cos\left(\frac{2a\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ .
4) Si p est un entier tel que $2^n \equiv 1 [ p ]$ . Montrer que $2^a \equiv 2 [ p ]$ .

**EXERCICE 11.11**

1) Montrer que pour tout entier n positif, on a $10^n \equiv 1 [ 9 ]$ .
2) En déduire que si n s'écrit $10u + v$, alors n est divisible par 9 si et seulement si $u + v$ est divisible par 9.
3) En déduire un critère de divisibilité par 9.

**EXERCICE 11.12 (CORRIGE)**

Démontrer sans calculatrice les congruences suivantes :

1) $15^5 - 3^5 \equiv 0 [ 12 ]$ .
2) $9^{10} - 5^{10} \equiv 0 [ 7 ]$ .

**EXERCICE 11.13**

1) Démontrer que $3^5 \equiv 1 [ 11 ]$ .
2) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et r : $3^{5k+r} \equiv 3^r [ 11 ]$ .
3) Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles dans la division de $3^n$ par 11 ?
4) Trouver pour quelles valeurs de l'entier naturel n, $3^n + 7$ est divisible par 11.

**EXERCICE 11.14**

937 et 1933 sont –ils des nombres premiers. ?

**EXERCICE 11.15**

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126, 525 et 720 .

**EXERCICE 11.16**

Soit a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

1) Démontrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$ .
2) En déduire que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors a = 2.

**EXERCICE 11.17**

1) Démontrer que si n est un entier naturel premier alors (n-1)! n'est pas divisible par n.
2) Soit n entier supérieur ou égal à 5.
   Démonter que si n n'est pas premier, alors n divise (n-1)! .

**EXERCICE 11.18 (CORRIGE)**

1) Soit n un entier naturel, $n > 3$ . Le nombre $n^2 - 4n + 3$ est-il premier ?
2) De même avec $n > 1$ et $n^2 + n + 2$ .

**EXERCICE 11.19**

Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que p divise : $1 + 2 + \ldots + 2^{p-2}$ .

**EXERCICE 11.20**

1) Décomposez 360 en produit de facteurs premiers.
2) Combien 360 a-t-il de diviseurs ?

**EXERCICE 11.21**

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1) Démontrer que p s'écrit $6k - 1$ ou $6k + 1$ avec k entier strictement positif.
2) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

**EXERCICE 11.22**

Montrer, en utilisant l'égalité de Bézout, que pour tout entier relatif n, les entiers $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

**EXERCICE 11.23**

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $33a - 45b = 0$ .

**EXERCICE 11.24 (CORRIGE)**

Déterminer deux entiers naturels a et b sachant que leur PGCD est 15 et que leur somme est 150 (deux réponses).

**EXERCICE 11.25**

Résoudre les équations suivantes, où (x,y) est un couple d'entiers naturels :

1) $26x + 65y = 13$

2) $60x - 21y = 6.n$

**EXERCICE 11.26**

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers naturels a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et que $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$.

**EXERCICE 11.27**

Résoudre l'équation $19x - 33y = 1$ où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

**EXERCICE 11.28**

1) Trouvez tous les entiers naturels diviseurs de 108.
2) Trouver tous les couples (x,y) d'entiers naturels dont le PGCD (noté d) et le PPCM (noté m) sont tels que $m - 3d = 108$ et $10 < d < 15$ .

**EXERCICE 11.29**

1) Prouver qu'il existe au moins deux entiers relatifs k et n tels que $13k - 23n = 1$ . Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.
2) Résoudre l'équation $-156x + 276y = 24$ , où (x,y) est un couple d'entiers relatifs.

**EXERCICE 11.30 (CORRIGE)**

1) Déterminer le PGCD de $2^{12} - 1$ et $2^8 - 1$, puis celui de $2^{14} - 1$ et $2^{10} - 1$ . (rappel : quand d divise n, alors $2^d - 1$ divise $2^n - 1$). Que peut-on conjecturer ?
2) On cherche à déterminer D le PGCD de $2^n - 1$ et $2^m - 1$ , où n et m sont des entiers non nuls, avec $m \leq n$ .

   a) Si r est le reste de la division euclidienne de n par m, établir que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$ .

   b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, exprimer D en fonction de d = PGCD (n,m) .

# Chapitre XII : CALCUL MATRICIEL ET APPLICATIONS (SPECIALITE)

### EXERCICE 12.1

1. Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimensions $3 \times 3$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, $a_{ij} = i + j$.
2. Ecrire la matrice $B = (b_{ij})$ dimensions $2 \times 3$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, $b_{ij} = 2^{i-j}$.
3. Ecrire la matrice $C = (c_{ij})$ dimensions $4 \times 4$ dont les coefficients sont définis par :
   Pour tout $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$,
   $\begin{cases} c_{ij} = |i-j| \text{ si } i \neq j \\ c_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

### EXERCICE 12.2

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices suivantes :

1. $C = -3A$
2. $E = A + B$
3. $D = 4B$
4. $F = B - A$

### EXERCICE 12.3

Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices suivantes $C = A - 2B$ et $D = 3A + B$.
2. Calculer rapidement $M = 3C - D$ et $N = C + 2D$.

### EXERCICE 12.4

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices suivantes $AB$ et $BA$.
2. Rappeler la propriété sur le produit matriciel illustrée par cet exemple.

### EXERCICE 12.5

Soit A une matrice de dimensions $p \times q$ et B une matrice de dimension $q \times p$, avec $p > q$.

Est-il possible que l'on ait $AB = BA$ ?

**EXERCICE 12.6**

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit $AB$ :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ;
2. $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

**EXERCICE 12.7**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $A+B$, puis $(A+B)^2$.
   b. Calculer $A^2$, et $AB$ puis $B^2$. Comparer avec le résultat de la question **a.**
2. Reprendre **1.** Avec $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

**EXERCICE 12.8**

Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $p$ telles que $AB = BA$. Démontrer que :

a. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ;

b. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ .

**EXERCICE 12.9**

Ecrire ces systèmes, sans chercher à les résoudre, sous la forme d'une égalité matricielle $AX = B$, où est une matrice carrée d'ordre 3, $X$ et $B$ deux vecteurs-colonnes :

1. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+5=0 \\ 4x-y-2z=1 \end{cases}$ ;
2. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-z=1 \\ 3x-5y+2z=0 \end{cases}$ ;
3. $\begin{cases} x+y=4 \\ -3+z=1 \\ x-2y-z=6 \end{cases}$ ;
4. $\begin{cases} 2x+5y=2 \\ 3y+2z=0 \\ x-y=14 \end{cases}$ .

**EXERCICE 12.10**

Dans chacun des cas suivants, la matrice *c* est-elle inversible ? Si oui, calculer à la main son inverse $A^{-1}$.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ;
2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ ;

**EXERCICE 12.11**

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. les matrices A, B et A + B sont elles inversibles ?
2. calculer $A^{-1}$, $B^{-1}$ et $(A + B)^{-1}$ .
3. La proposition suivante est elle vraie ? Justifier la réponse.

« *Si A et B sont deux matrices inversibles, alors A + B est également inversible et* $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ ».

4. Donner un exemple de deux matrices inversibles dont la somme n'est pas inversible.

**EXERCICE 12.12**

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer à la main les produits A B et BA.
2. Que peut on en déduire de A et B ?

**EXERCICE 12.13**

On donne le système linéaire suivant : S : $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -3x+5y=-2 \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous la forme d'une égalité matricielle A X = B où A est une matrice carrée d'ordre 2, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B un vecteur – colonne de dimensions $2\times 1$ .
2. cette matrice est elle inversible ? Si oui calculer $A^{-1}$.
3. Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel.

**EXERCICE 12.14**

On donne le système linéaire suivant S : $\begin{cases} 5x-3z=-4 \\ 3x+4y+z=2 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous la forme d'une égalité matricielle A X = B où A est une matrice carrée d'ordre 3.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B un vecteur – colonne de dimension $3 \times 1$.

2. Utiliser une calculatrice ou un logiciel pour vérifier que la matrice A est inversible ( en calculant son déterminant), puis calculer son inverse $A^{-1}$.
3. Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel.

**EXERCICE 12.15**

Soit k un nombre réel. On pose $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer à la main $A_k^2$ et. $A_k^3$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout k $\in$ N, on a $A_k^n = \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**EXERCICE 12.16**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et $A^3$.
2. Démontrer par récurrence que l'on a $A^n = 3^{n-1}A$ pour tout entier naturel n $\geq$ 1.

**EXERCICE 12.17**

Pour tout entier naturel n, on définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par : $\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$

Dans cet exercice nous allons déterminer une expression explicite du terme général de chacune de ces suites.

1. Calculer les cinq premiers termes de ces deux suites.
2. Pour tout n $\in$ N on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Démontrer que l'on a $U_{n+1} = MU_n$ pour tout entier n $\in N$ ,

où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.

3. Démontrer par récurrence que pour tout n $\in$ N on a : $U_n = M^n U_0$.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
5. démontrer que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale dont on donnera l'expression.
6. En déduire que $M = PDP^{-1}$ puis démontrer que pour tout n $\in$ N on a $M^n = PD^nP^{-1}$. Donner l'expression de la matrice $M^n$ en fonction de n.
7. En utilisant la question 3., démontrer que les termes généraux des deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont

données par : $\begin{cases} a_n = \frac{2}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ b_n = \frac{2}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{cases}$.

Comparer les résultats obtenus par ces formules avec les résultats obtenus dans la question 1. Pour les premiers termes de chaque suite.

**EXERCICE 12.18**

Dans les cas suivants, la matrice T est elle la matrice de transition d'un processus aléatoire ?Justifier la réponse.

1. $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ 3. $T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ 4. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

5. $T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

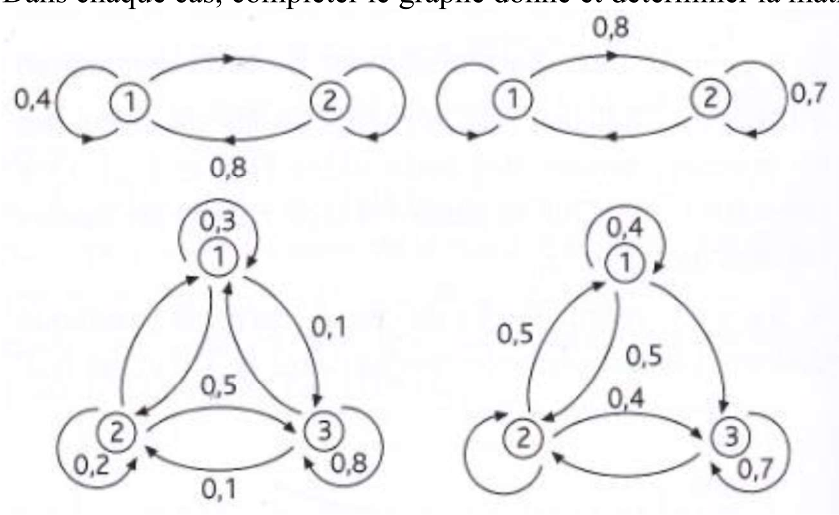
**EXERCICE 12.19**

Représenter par un graphe les situations décrites par les matrices de transitions ci- après :

1. $T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ 2. $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ 4. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**EXERCICE 12.20**

Dans chaque cas, compléter le graphe donné et déterminer la matrice de transition associée.



# PREPARATION AU BAC

**EXERCICE 1** ***Liban 2005***

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. «Si $a$ est un nombre réel quelconque et $f$ une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\ ;\ +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.»

2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g$ ne s'annulant pas :
«Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$».

3. «Si $f$ est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0\ +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$».

4. On considère un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
«Si $f$ est une fonction définie sur R* alors la droite d'équation $x= 0$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$».

5. «La fonction $f$ définie sur R par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur R de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$».

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.
«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3,-2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.
«L'ensemble des points $M$ du plan tels que $\|3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1».

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par $M$ un point quelconque du plan.
« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M$ = A ou $M$ = B».

**EXERCICE 2** ***Inde 2008 - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

**Partie A**

On suppose connus les résultats suivants :

**a.** Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes $z_A$, $z_B$ et $z_C$ trois points A, B et C.

Alors $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ (2\pi)$

**b.** Soit $z$ un nombre complexe et soit $\theta$ un réel :
$z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où $k$ est un entier relatif.
***Démonstration de cours*** : démontrer que la rotation $r$ d'angle $\alpha$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z$ associe le point M' d'affixe $z'$ tel que

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

**Partie B**

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

**1. a.** Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

**b.** Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ ?

**c.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

**2.** On considère la rotation $r$ de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par :

$$E = r(A) \text{ et } F = r(C).$$

**a.** Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

**b.** Donner l'écriture complexe de $r$.

**c.** Déterminer l'affixe du point E.

**EXERCICE 3** ***National 2004 - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

**1.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul $k$ et pour tout entier naturel $x$ :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier $a$ supérieur ou égal à 2.

**2.**

(a) Soit $n$ un entier naturel non nul et $d$ un diviseur positif de $n : n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

(b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

**3.** Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls et $d$ leur pgcd.

(a) On définit $m'$ et $n'$ par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à $m'$ et $n'$, montrer qu'il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $mu - nv = d$.

(b) On suppose $u$ et $v$ strictement positifs.
Montrer que : $(a^{mu}-1) - (a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

(c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

**EXERCICE 4** ***National 2008***

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
a. Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
b. Démontrer que la variable $X$ suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s > 0$, la probabilité conditionnelle
$P_{X>t}(X>t+s)$ ne dépend pas du nombre $t > 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}00026$.
a. Calculer $P(X < 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
b. Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.
c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures?
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

**EXERCICE 4** ***Amérique du Nord 2006***

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On s'intéresse aux fonctions $f$ dérivables sur $[0; +\infty[$ vérifiant les conditions :

(1) : pour tout réel $x$ appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = 4 - [f(x)]^2$
(2) : $f(0) = 0$
On admet qu'il existe une unique fonction $f$ vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

**Partie A. Étude d'une suite**

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction $f$ on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés $(M_n)$, d'abscisse $x_n$ et d'ordonnée $y_n$ telles que :

$x0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $x_{n+1} = x_n + 0,2$
$y0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $y_{n+1} = -0,2\,y_n^2 + y_n + 0,8$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 0 | 0,2 | 0,4 | | | | |
| $y_n$ | 0 | 0,800 0 | 1,472 0 | | | | |

Compléter ce tableau. On donnera les résultats à $10^{-4}$ près.

b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points $M_n$ pour $n$ entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite $(y_n)$ et sur sa convergence ?

2. a. Pour $x$ réel, on pose $p(x) = -0{,}2\,x^2 + x + 0{,}8$. Montrer que si $x \in [0\,;\,2]$ alors $p(x) \in [0; 2]$.
b. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq y_n \leq 2$.
c. Étudier le sens de variation de la suite $(y_n)$.
d. La suite $(y_n)$ est-elle convergente ?

**PARTIE B : ETUDE D'UNE FONCTION**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ et $(C_g)$ sa courbe représentative.

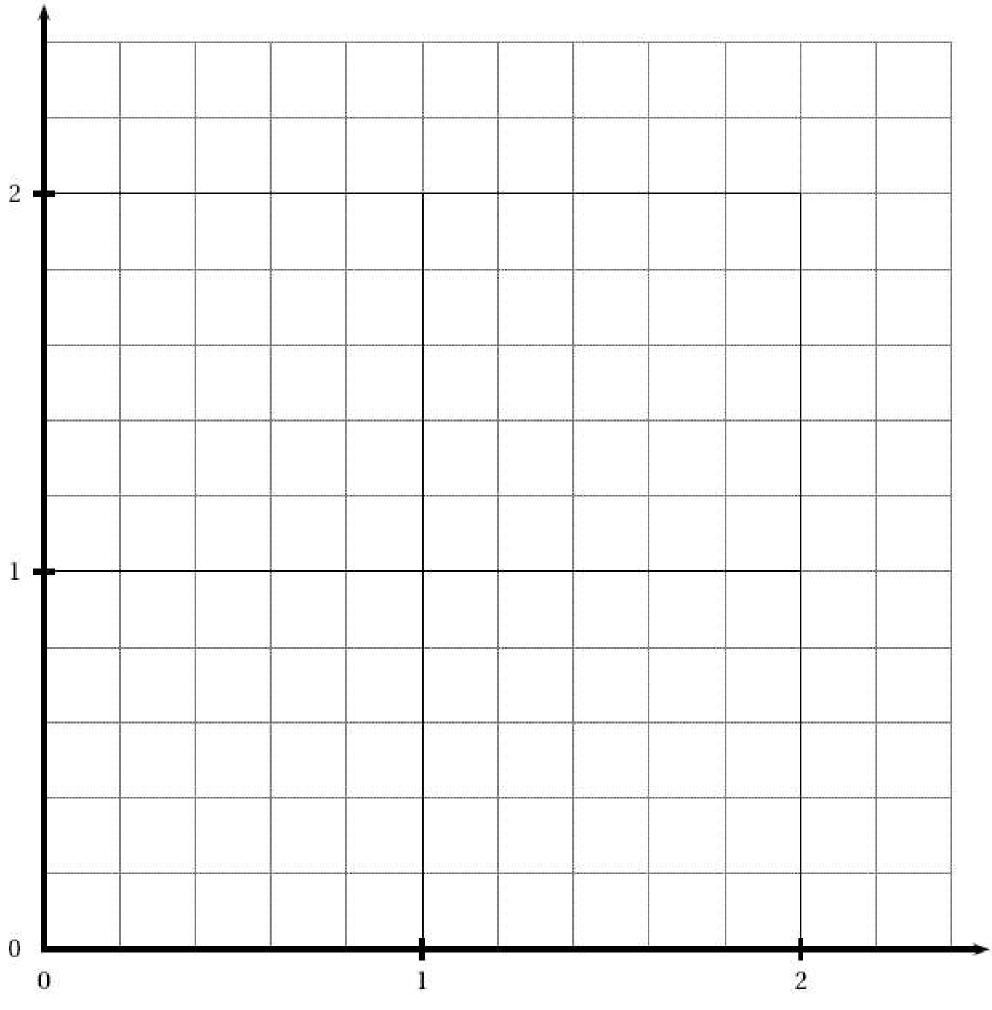
Montrer que la fonction $g$ vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. Montrer que $(C_g)$ admet une asymptote $\Delta$ dont on donnera une équation.
b. Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse $\alpha$ du point d'intersection de $\Delta$ et de la tangente à $(C_g)$ à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $(C_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

**Annexe**



# Partie C : CORRECTION DES EXERCICES

# Chapitre I : LIMITES ET CONTINUITE

### EXERCICE 1.2

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ en $x_0 = -2$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par

$( x - 2 )$ d'où $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$ .

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = 0^-$.

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{2x^2+1} + 1$.

D'où : $f(x) = \dfrac{2x}{(\sqrt{2x^2+1}+1)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

### EXERCICE 1.11

Il suffit de transformer l'expression de f(x) :

$f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x^2+1} = \dfrac{ax^3 + bx^2 + ax + b + c}{x^2+1}$ .

En identifiant les termes des polynômes au numérateur des deux expressions, on trouve :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ a = 2 \\ b + c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

et $f(x) = 2\,x + \dfrac{1}{x^2+1}$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} ( f(x) - 2x ) = \lim\limits_{x \to -\infty} ( f(x) - 2x ) = 0$

La droite d'équation y = 2x est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ et $-\infty$.

# Chapitre II : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS

### EXERCICE 2.3

3) On ne peut pas conclure directement car on a une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[ -1 ; +\infty [$ . On a $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x + 1$ .
u est dérivable et strictement positive sur $] -1 ; +\infty [$ , f est donc dérivable sur cet intervalle.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $f'(8) = \dfrac{1}{6}$.

D'après la définition du nombre dérivé, on a

$f'(8) = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 8} = \dfrac{1}{6}$.

### EXERCICE 2.10

1) $D_f = \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc, pour tout x réel,

$(1 + x^2)\,f'(x) = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} = x\,f(x)$.

2) La fonction $f'$ est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$ :

$(1 + x^2)\,f''(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, et par conséquent :

$(1 + x^2)^2 f''(x) = \sqrt{1+x^2} = f(x)$.

D'où $(1 + x^2)\,f'(x) + (1 + x^2)^2 f''(x) = (1 + x)f(x)$.

### EXERCICE 2.16

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Soit x réel non nul, alors :

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{g(x)}{x^2}.$$

Donc, pour tout x non nul, $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $g'(x) = 2x(3x + 1)$.

On obtient le tableau de variation ci-dessous.

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g' | | + | 0 | - | 0 | + | |
| g | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{26}{27}$ | $\searrow$ | -1 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sur ] 0 ; 1 [ , g est strictement croissante (et continue), donc g réalise une bijection de ] 0 ; 1 [ vers ] -1 ; 2 [ . Donc il existe un unique réel $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, tel que $g(\alpha) = 0$ .

3) Le tableau de variation de f est le suivant :

| x | $-\infty$ | | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | | - | ‖ | - | 0 | + | |
| f | $+\infty$ ↘ - | | ‖ | $+\infty$ ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

4) a) I(-1 ; $\frac{-1}{3}$) et J(1 ;1), la droite (IJ) a pour équation : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

La tangente à la courbe C en J est la droite d'équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

b) Equation de la tangente T en I à C :

$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ , soit $y = -\frac{2}{3}x - 1$ .

5) On étudie le signe de la différence :

$$\frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x}) - (-\frac{2}{3}x - 1).$$

On trouve alors que si $x \leq -1$, alors C est au dessus de T ; et si $x \geq -1$, C est au dessous de T.

# Chapitre III : FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

**EXERCICE 3.11**

1) On pose X = ln x et Y = ln y et on résout le système en X et Y.
2) Les propriétés du logarithme nous permettent d'écrire xy= 1 et x+y=e.
3) On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$ et on résout le système en X et Y.
4) On pose $X = x^{\frac{3}{4}}$ et $Y = y^{\frac{2}{3}}$ et on résout le système en X et Y.

**EXERCICE 3.16**

1) $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire car pour tout x de $D_f$, -x appartient à $D_f$ et f(-x) = - f(x), donc la

courbe $C_f$ sera symétrique par rapport à l'origine du repère et on étudie f sur [ 0 ; + ∞ [ .

f est dérivable sur $D_f$ de fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} .$$

Donc, pour tout x de $D_f$, $f'(x) > 0$ .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ . Donc la droite d'équation y = 1 est asymptote à $C_f$ .

On résume cela dans le tableau de variation ci-dessous.

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| f' | + | |
| f | -1 ↗ | 1 |

2) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans ] -1 ; 1 [ et f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur ] -1 ; 1 [ .

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

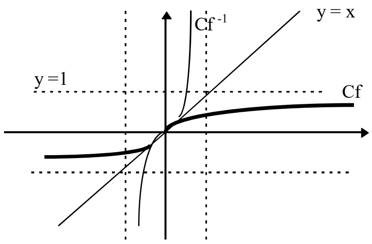
$$\Rightarrow y + y e^{-2x} = 1 - e^{-2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2x}(1 + y) = 1 - y$$

$$\Rightarrow -2x = \ln\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{2}\ln\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right) = \ln\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}} .$$

1) Pour tracer les courbes, on sait qu'elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.



# Chapitre V : INTEGRALES ET PRIMITIVES

### EXERCICE 5.14

1) Pour tout x réel, $1 + e^x > 1$ donc $\ln(1+e^x) > 0$, et $e^{-x} > 0$.

Donc, pour tout x réel, $f(x) > 0$ et $I(\alpha) > 0$.

2) a) On met l'expression au même dénominateur et par identification, on trouve : a = 1 et b = -1.

$$\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^\alpha dx - \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= [x]_0^\alpha - [\ln(1+e^x)]_0^\alpha = \alpha - \ln(1+e^\alpha) + \ln 2 .$$

b) Pour tout x réel,

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} .$$

Pour tout x réel, $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ .

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}dx - \int_0^\alpha f'(x)dx$$

$= \alpha - \ln(1 + e^\alpha) + \ln 2 - f(\alpha) + f(0)$ .

Donc $I(\alpha) = \alpha + 2\ln 2 - (1+e^{-\alpha})\ln(1+e^\alpha)$ .

### EXERCICE 5.17

A) 1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation x = -1 est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

2) f est définie sur $]-1 ; 0]$ (énoncé), f est dérivable sur $]-1 ; 0]$ de fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{1 - x^2} = \frac{(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))}{1-x^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

| x | -1 | | $1-\sqrt{2}$ | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | | + | 0 | - | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $\approx 0{,}226$ | ↘ | 0 |

3) Le coefficient directeur de la tangente D à C en x= 0 est $f'(0) = -1$.

5) $f(-0{,}72) \approx -0{,}0106$ et $f(-0{,}71) \approx 8{,}62.10^{-3}$ . Donc $\alpha \in ]-0{,}72 ; -0{,}71[$.

B) 1) $\ln(1-x^2) = \ln[(1-x)(1+x)] = \ln(1-x) + \ln(1+x)$.

2) $I = \int_\alpha^0 \ln(1+x)dx = [x\ln(1+x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \frac{x}{1+x}dx$ .

Or, $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ .

Donc, $I = -\alpha\ln(1+\alpha) - \int_\alpha^0 (1 - \frac{1}{1+x})dx$

$\Rightarrow I = -\alpha\ln(1+\alpha) - [x - \ln(1+x)]_\alpha^0$

$\Rightarrow I = \alpha - (1+\alpha)\ln(1+\alpha)$ .

On calcule J en procédant de la même manière.

3) $K = I + J - \int_\alpha^0 x dx$ .

$$K = 2\alpha + \ln\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - \alpha\ln(1-\alpha^2) + \frac{\alpha^2}{2} .$$

Or $f(\alpha) = 0$ , donc $\ln(1-\alpha^2) = \alpha$ .

$$\text{D'où } K = 2\alpha + \ln\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{2} .$$

4) a) $A = \int_\alpha^0 f(x)dx = 100\,K\ cm^2$.

b) $\alpha < -0{,}71$ et $f \geq 0$ sur $[\alpha ; 0]$

$$A = \int_\alpha^{-0{,}71} f(x)dx + \int_{-0{,}71}^0 f(x)dx \geq \int_{-0{,}71}^0 f(x)dx .$$

# Chapitre VI : SUITES NUMERIQUES

### EXERCICE 6.9

1) $u_0 \neq 1$ . Supposons que la propriété est vraie au rang n : $u_n \neq 1$ .

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2+3u_n}{4+u_n} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{4+u_n} \neq 0 \text{ donc la}$$

propriété est vraie au rang n + 1 .

Et donc, pour tout n entier, $u_n \neq 1$.

2) $v_{n+1} = \dfrac{2+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{8+2u_n+2+3u_n}{4+u_n-2-3u_n}$

$= \dfrac{5(2+u_n)}{2(1-u_n)} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2+u_n}{1-u_n} = \dfrac{5}{2} v_n$

3) La suite est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $\dfrac{5}{2}$. On a donc $v_n = 3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$.

4) $v_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

5) $(1-u_n)v_n = 2+u_n \iff$

$v_n - u_n v_n = 2+u_n \iff v_n - 2 = u_n(v_n+1)$

$\iff u_n = \dfrac{v_n-2}{v_n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

**EXERCICE 6.15**

1) a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ ; donc au voisinage de $+\infty$, $\ln(n+2^{-n})$ se comporte comme ln n.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ ; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+2^{-n})}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+2^{-n})}{2n} = 0$.

b) Calculons $\dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} - \dfrac{\ln 2}{2}$ :

$\dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} - \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln(1+n2^n) - n\ln 2}{2n} =$

$\dfrac{\ln(1+n2^n) - \ln 2^n}{2n} = \dfrac{\ln(\frac{1}{2^n}+n)}{2n} = \dfrac{\ln(n+2^{-n})}{2n}$

D'après la question 1)a),

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} - \dfrac{\ln 2}{2}\right] = 0$ ;

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

2) a) $u_0 = \int_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$.

b) Soit $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx$

$= \dfrac{1}{2n}\int_0^1 \dfrac{2n\times 2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \dfrac{1}{2n}\left[\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1$

$= \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\ln 2}{2}$.

# Chapitre VII : PROBABILITES ET LOIS DE PROBABILITE

**EXERCICE 7.5**

1) Tirages simultanés :

a) $\binom{15}{3} = 455$ tirages.

b) $\binom{6}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 20 + 4 + 14 = 34$ tirages unicolores.

c) $6 \times 4 \times 5$ tirages tricolores.

d) $\binom{15}{3} - \binom{9}{3} = 455 - 84 = 371$ tirages contenant au moins une boule blanche.

2) Tirages successifs :

a) $15^3 = 3375$ tirages.

b) $6^3 + 5^3 + 4^3$ tirages unicolores.

c) Il faut tenir compte de l'ordre d'obtention des boules. On multiplie donc $6 \times 5 \times 4$ par le nombre de permutations qui est de 3!.

d) $15^3 - 9^3 = 2646$ tirages contenant au moins une boule blanche.

**EXERCICE 7.18**

C'est un schéma de Bernoulli, la réponse est donc : $\binom{5}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}16$.

**EXERCICE 7.20**

1) La probabilité d'obtenir deux as est : $p = \dfrac{1}{20}$.

2) Pour k = 0, 1, 2, 3 ; p(« k fois deux as »)

$= \binom{3}{k}\left(\dfrac{1}{20}\right)^k\left(\dfrac{19}{20}\right)^{3-k}$ (schéma de Bernoulli).

On en déduit le tableau suivant :

| k fois deux as | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $\dfrac{6859}{8000}$ | $\dfrac{1083}{8000}$ | $\dfrac{57}{8000}$ | $\dfrac{1}{8000}$ |
| valeur de X | -5 | 10 | 50 | 100 |

L'espérance mathématique de X est donc :

$E(X) = \dfrac{-5\times 6859 + 10\times 1083 + 50\times 57 + 100}{8000}$

$= \dfrac{-20515}{8000} \approx -2{,}56$.

# Chapitre IX : NOMBRES COMPLEXES

**EXERCICE 9.12**

$z_1 = 3 + 3$ i donc $|z_1| = 3\sqrt{2}$

En factorisant par $3\sqrt{2}$, on obtient :

$z_1 = 3\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

De la même manière, on trouve

$z_2 = 2\,(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

En utilisant les règles de calcul sur les nombres complexes écrits sous forme trigonométrique, on obtient :

$z_1 z_2 = 6\sqrt{2}\,(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$

$z_1 / z_2 = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12}))$

$z_1^3 = 54\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

**EXERCICE 9.14**

Soit y un réel. P(iy) = 0 $\Leftrightarrow$

$-y^3 i - 4y^2 i + 6y^2 + 13yi + 24y + 52i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y(y+4) = 0 \\ y^3 + 4y^2 - 13y - 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4$

La solution imaginaire de P(z)= 0 est donc z = - 4i.
Donc, $P(z) = (z + 4i)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c des réels.
Par identification terme à terme, il vient a = 1 ; b = -6 et c = 13.
Le polynôme $z^2 - 6z + 13$ admet 3 + 2i et 3 - 2i comme racines. D'où S = {- 4i ; 3 + 2i ; 3 - 2i }

**EXERCICE 9.19**

1) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, l'équation devient :
2) $z^2 - 3\sqrt{3}\,z + 9 = 0$

On résout cette équation et on trouve $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_1| = |z_2| = 3$. Donc, M1 et M2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 3.

# Chapitre XI : ARITHMETIQUE (SPECIALITE)

**EXERCICE 11.1**

Les restes possibles sont 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
Le reste de m+n est le reste de 4+5 = 9 dans la division euclidienne par 7, c'est à dire 2.
Le reste de m.n est le reste de $4 \times 5 = 20$ dans la division euclidienne par 7, c'est à dire 6.
Le reste de $m^2$ est le reste de $4^2 = 16$ dans la division euclidienne par 7, c'est à dire 2.
Le reste de $n^3$ est le reste de $5^3 = 125$ dans la division euclidienne par 7, c'est à dire 6.

**EXERCICE 11.6**

1) x.y = -6 = $-2\times3$. L'ensemble des diviseurs de -6 est : {-6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6}.
Les couples solutions sont donc :
(-6 ; 1) ; (-3 ; 2) ; (-2 ; 3) ; (-1 ; 6) ; (1 ; -6) ; (2 ; -3) ; (3 ; -2) ; (6 ; -1).

**EXERCICE 11.12**

1) $15 \equiv 3$ [ 12 ] donc $15^5 - 3^5 \equiv 3^5 - 3^5$ [ 12 ].

**EXERCICE 11.18**

On a : $n^2-4n+3 = (n-3).(n-1)$ . Si n = 4, $n^2-4n+3 = 3$ qui est premier. Sinon $n^2-4n+3$ se décompose en un produit de facteurs supérieurs à 1, donc n'est pas premier.

**EXERCICE 11.24**

PGCD (a,b) = 15 donc a = 15.a' et b = 15.b', où a' et b' sont premiers entre eux.
a+b = 15.(a'+b') = 150 d'où a'+b' = 10 or
10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 .
Les seuls couples (a',b') premiers entre eux sont (1 ; 9) et (3 ; 7) d'où : a = 15 et b = 135 ou a = 45 et b = 105.

**EXERCICE 11.30**

1) $2^{12} - 1 = 4095$ et $2^8 - 1 = 255$.
PGCD(4095 ;255) = 15 = $2^4 - 1$.

$2^{14} - 1 = 16383$ et $2^{10} - 1 = 1023$.

PGCD(16383 ;1023) = 3 = $2^2 - 1$.

On peut deviner que :

PGCD($2^m - 1$ ; $2^n - 1$) = $2^d - 1$ où d = PGCD(m ;n).

2) a) Si n = mq + r, avec $0 \le r < m$, alors :
$2^n - 1 = (2^{mp} - 1)2^r + 2^r - 1$.

Mais $2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \ldots + 2^m + 1 = \frac{1 - 2^{mq}}{1 - 2^m}$

(somme des termes d'une suite géométrique).

Donc : $2^n - 1 =$
$(2^m - 1)(2^{m(q-1)} + 2^{m(q-2)} + \ldots + 2^m + 1)2^r + 2^r - 1$.
Comme $0 \leq r < m$, $0 \leq 2^r - 1 < 2^m - 1$, alors l'égalité précédente est la division euclidienne de $2^n - 1$ par $2^m - 1$ et le reste vaut $2^r - 1$.

b) Soit d = PGCD(m ;n) et soit D = PGCD($2^m - 1$ ; $2^n - 1$). En décomposant l'algorithme d'Euclide, la suite des restes est $2^{r_0} - 1$ ,..., $2^{r_i} - 1$ avec, $r_0$, ..., $r_i$ les restes de la division euclidienne de n par m, donc D = $2^d - 1$.