Calcul numérique

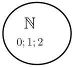
©Walid HADDAD

https://www.acppav.org

1. Les ensembles de nombres

a) $\mathbb{N}$

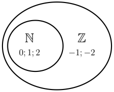
L'ensemble des **entiers naturels** (c'est à dire les entiers positifs $0; 1; 2; \cdots$) est noté $\mathbb{N}$.



b) $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers relatifs** (c'est à dire les entiers positifs et négatifs $\cdots; -1; -1; 0; 1; 2; \cdots$) est noté $\mathbb{Z}$.

▶ **Remarque :** comme tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{Z}$, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

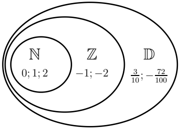


c) $\mathbb{D}$

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur est un entier et dont le dénominateur est une puissance de 10 est appelé **nombre décimal** et l'ensemble de ces nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

▶ **Exemples :** 2,1 est un nombre décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{21}{10}$. De même $-0{,}03$ qui peut s'écrire sous la forme $-\frac{3}{100}$ est un nombre décimal.

▶ **Remarque :** comme tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont aussi dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$.



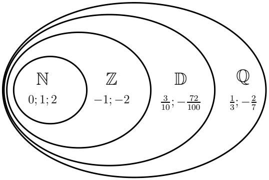
1. Les ensembles de nombres

d) $\mathbb{Q}$

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers (positifs ou négatifs) est appelé **nombre rationnel** et l'ensemble de ces nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

▶ **Remarque :** $\mathbb{Q}$ contient les nombres décimaux mais aussi toutes les fractions d'entiers dont le dénominateur entier n'est pas une puissance de 10. $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.

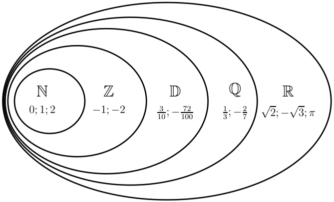
▶ **Exemples :** les fractions $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{7}$ sont des rationnels (sans être des décimaux).



e) $\mathbb{R}$

Certains nombres (comme $\sqrt{2}$, π) ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers. Ces nombres sont appelés **irrationnels**.

L'ensemble formé des rationnels et des irrationnels est appelé ensemble des **nombres réels** et il est noté $\mathbb{R}$.



2. Propriétés des entiers

a) Divisibilité

Si un entier a est égal au produit d'un entier b par un autre entier k, on dit que a est un **multiple** de b et que b est un diviseur de a.

▶ **Exemple :** on a $21 = 7 \times 3$ donc on peut dire que 21 est un multiple de 3 et que 3 est un diviseur de 21.

b) Entiers pairs et impairs

- Un entier naturel n est pair s'il est un multiple de 2, autrement s'il peut s'écrire sous la forme $n = 2k$ où k est un entier.
- Tous les autres entiers naturels sont dits impairs et comme ils alternent avec les entiers pairs, dire qu'un entier n est impair équivaut à dire qu'il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + 1$ où k est un entier.

c) Nombres premiers

Un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par 1 et lui-même.
▶ **Exemples :** Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

15 n'est pas premier car il est divisible par 3.

d) Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

On admet que tout entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

▶ **Exemples :** $30 = 2 \times 3 \times 5$; $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$

3. Règles de calculs dans $\mathbb{R}$

a, b, c, d et k étant des réels quelconques (non nuls, s'ils sont au dénominateur d'une fraction)

a) Avec des produits

- $a(b+c) = ab + ac$ *exemple :* $2(x-4) = 2x - 8$
- $a(bc) = (ab)c$ *exemple :* $4(3x^2) = (4\times 3)x^2 = 12x^2$

b) Avec des quotients

- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ *exemple :* $\frac{8}{12} = \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{2}{3}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ *exemple :* $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$ *exemple :* $\frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3+10}{2\times 3} = \frac{13}{6}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *exemple :* $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times 5}{4\times 2} = \frac{15}{8}$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ *exemple :* $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ *exemple :* $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

3. Règles de calculs dans $\mathbb{R}$

c) Règles des signes

- $-(-a) = a$ — *exemple :* $-(-2x) = 2x$
- $-(a+b) = -a-b$ — *exemple :* $-(2+x) = -2-x$
- $-(a-b) = -a+b$ — *exemple :* $-(3x-4) = -3x+4$
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ — *exemples :* $\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$; $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ — *exemple :* $\frac{-x}{-3} = \frac{x}{3}$

d) Nullité d'un produit

Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul.

4. Identités remarquables

Propriété(s)

Pour tous les réels a et b :

- $$(a+b)^2 \underset{\xleftarrow{\textit{factoriser}}}{\overset{\xrightarrow{\textit{développer}}}{=}} a^2 + 2ab + b^2$$
- $$(a-b)^2 \underset{\xleftarrow{\textit{factoriser}}}{\overset{\xrightarrow{\textit{développer}}}{=}} a^2 - 2ab + b^2$$
- $$(a-b)(a+b) \underset{\xleftarrow{\textit{factoriser}}}{\overset{\xrightarrow{\textit{développer}}}{=}} a^2 - b^2$$

Démonstrations

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

(apprendre les identités remarquables permet d'utiliser directement le résultat des formules sans avoir à refaire ces calculs)

4. Identités remarquables

Exemple(s)

1. À l'aide des identités remarquables, développer les expressions suivantes :
(on utilise les identités remarquables dans le sens $\xrightarrow{\textit{développer}}$*)*

- $(x+3)^2 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(4-x)^2 = 4^2 - 2\times 4\times x + x^2 = 16 - 8x + x^2$
- $(2x-6)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 6 + 6^2 = 4x^2 - 24x + 36$
- $(x-\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\times x\times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
- $(7-x)(7+x) = 7^2 - x^2 = 49 - x^2$
- $(5x-1)(5x+1) = (5x)^2 - 1^2 = 25x^2 - 1$

2. À l'aide des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes :
(on utilise les identités remarquables dans le sens $\xleftarrow{\textit{factoriser}}$*)*

- $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$
- $9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2 = (3-2x)(3+2x)$
- $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2 = (x+5)^2$
- $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2\times x\times 7 + 7^2 = (x-7)^2$

5. Opérations sur les puissances

a) Puissance d'exposant entier strictement positif

Pour tout réel a et pour tout entier strictement positif n, la puissance $n^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^n tel que $a^1 = a$ et $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fois}}$ si $n \geqslant 2$.

▶ **Exemples :** • $2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3 \text{ fois}}$ • $(-1,5)^4 = \underbrace{(-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5)}_{4 \text{ fois}}$

b) Puissance d'exposant entier strictement négatif

Pour tout réel non nul a et pour tout entier strictement positif n, la puissance $(-n)^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^{-n} tel que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

▶ **Exemples :** • $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ • $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.

c) Puissance d'exposant nul

Pour tout réel non nul a, on pose par convention que $a^0 = 1$.

▶ **Exemple :** $3^0 = 1$

5. Opérations sur les puissances

d) Règles de calculs avec les puissances

Pour tous les réels non nuls a et b et pour tous les entiers n et p :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$ *exemple :* $7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$
- $(a^n)^p = a^{np}$ *exemple :* $\left(7^2\right)^3 = 7^{2\times 3} = 7^6$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ *exemple :* $\frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$ *exemple :* $(2x)^3 = 2^3 \times x^3 = 8x^3$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *exemple :* $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$

Exemple(s)

Simplifier les expressions suivants :

- $\frac{2^4 \times 2^5}{2^3} = \frac{2^{4+5}}{2^3} = \frac{2^9}{2^3} = 2^{9-3} = 2^6$
- $\frac{\left(10^{-2}\right)^3}{10^4 \times 10^3} = \frac{10^{-2\times 3}}{10^{4+3}} = \frac{10^{-6}}{10^7} = 10^{-6-7} = 10^{-13}$
- $\frac{(2x)^3}{x^{(-4)}} = \frac{2^3 \times x^3}{x^{(-4)}} = 8 \times \frac{x^3}{x^{(-4)}} = 8x^{3-(-4)} = 8x^7$

6. Notation scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ où a est un décimal ne comportant qu'un seul chiffre (non nul) avant la virgule et p est un entier relatif.
Cette écriture est appelée **notation scientifique**.

Exemple(s)

- La notation scientifique de 15 000 est $1{,}5 \times 10^{4}$ car $1\overleftarrow{5000}^{4}$
- La notation scientifique de 0,000 000 2 est 2×10^{-7} car $0,\overrightarrow{0000002}^{7}$
- La notation scientifique de 876 000 000 est $8{,}76 \times 10^{8}$ car $8\overleftarrow{76000000}^{8}$
- La notation scientifique de −0,000 14 est $-1{,}4 \times 10^{-4}$ car $-0,\overrightarrow{0001}^{4}4$

Remarque(s)

Sur une calculatrice, $1{,}5 \times 10^4$ s'obtient en tapant `1.5` $\boxed{\texttt{x10}^x}$ `4` ou `1.5` $\boxed{\texttt{EE}}$ `4`

Fin du chapitre

Applications avec du calcul numérique

Pythagore - Thalès - Conversions des mesures - Proportionnalité

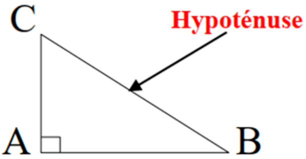
Walid HADDAD

https://www.acppav.org

1. Pythagore et triangles rectangles

Théorème Pythagore

Si un trangle ABC est rectangle en A, alors :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

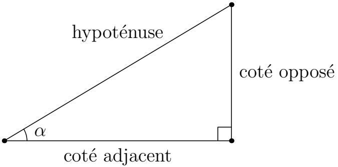


Réciproque de Pythagore

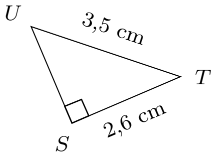
Dans un triangle ABC, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Alors ABC est rectangle en A

Trigonométrie

- $\cos\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\sin\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$



Exemple 1 : Pythagore



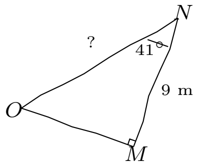
Le triangle SUT est rectangle en S donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
$UT^2 = SU^2 + ST^2$
D'où $SU^2 = UT^2 - ST^2$.
$SU^2 = 3{,}5^2 - 2{,}6^2 = 5{,}49$
$SU = \sqrt{5{,}49} \approx$ **2,3 cm**.

Exemple 2 : Réciproque

Le triangle WXY est tel que $XY = 5{,}1$ cm, $WY = 6{,}8$ cm et $WX = 8{,}5$ cm.

$WX^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25$
$WY^2 + XY^2 = 6{,}8^2 + 5{,}1^2 = 72{,}25$
Alors $WX^2 = WY^2 + XY^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée donc WXY est rectangle en Y.

Exemple 3 : Trigo



Dans le triangle MNO rectangle en M,

$$\cos\left(\widehat{MNO}\right) = \frac{MN}{NO}.$$

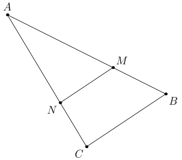
D'où $\dfrac{\cos(41°)}{1} = \dfrac{9}{NO}$

Soit $NO = \dfrac{9 \times 1}{\cos(41°)} \approx 11{,}9$ m.

2. Théorème de Thalès : traingles emboités

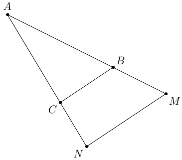
Thalès

Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC) et si la droite (MN) est parallèle à (BC) alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.



Réciproque de Thalès

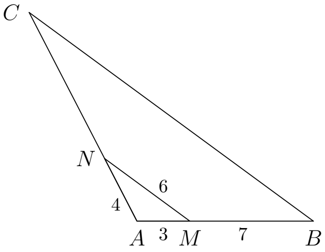
Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC), si A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$



Exemple 1

Dans la configuration ci-contre, on a :
$AM = 3$, $MB = 7$, $AN = 4$, $MN = 6$ et $(MN)//(BC)$.
Calculer les distances AC, NC et BC.

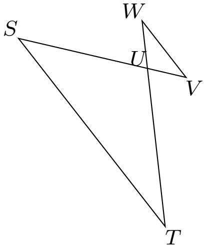
- On a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. On en déduit que $\frac{3}{10} = \frac{4}{AC} \Leftrightarrow 3 \times AC = 40 \Leftrightarrow AC = \frac{40}{3}$.
- Dès lors, on a $NC = AC - 4 = \frac{40}{3} - \frac{12}{3} = \frac{28}{3}$.
- On a $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. On en déduit que $\frac{6}{BC} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3 \times BC = 60 \Leftrightarrow BC = 20$.



Exemple 2

Sur la figure suivante, $SU = 5$ cm, $ST = 9$ cm, $UV = 1{,}5$ cm, $UW = 1{,}8$ cm et $(ST)//(VW)$.
Calculer les distances VW et UT.

- $\dfrac{UV}{US} = \dfrac{UW}{UT} = \dfrac{VW}{ST} \Leftrightarrow \dfrac{1{,}5}{5} = \dfrac{1{,}8}{UT} = \dfrac{VW}{9}$
- $VW = \dfrac{1{,}5 \times 9}{5} = 2{,}7$ cm
- $UT = \dfrac{1{,}8 \times 5}{1{,}5} = 6$ cm



3. Tableaux de conversion

Conversion d'unités

T			G			M			k	h	da	(unité)	d	c	m			µ			n			p
Tera…			Giga…			Méga…			kilo…	hecto…	déca…		déci…	centi…	milli…			micro…			nano…			pico…
10^{12}			10^{9}			10^{6}			10^{3}			1			10^{-3}			10^{-6}			10^{-9}			10^{-12}

Conversion d'unités au carrée (aire)

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha (*hectare*)		**a** (*are*)		**ca** (*centiare*)						

Conversion d'unités au cube (volume)

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	**hL**	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			

$\boxed{1\ dm^3 = 1\ L}$ $\boxed{1\ cm^3 = 1\ mL}$ $\boxed{1\ m^3 = 1000\ L}$

Autres conversions

Temps

$\boxed{1 \text{ an} = 365 \text{ j}}$ $\boxed{1 \text{ j} = 24 \text{ h}}$

$\boxed{1 \text{ h} = 60 \text{ min}}$ $\boxed{1 \text{ min} = 60 \text{ s}}$ $\boxed{1 \text{ h} = 3600 \text{ s}}$

Conversion de décimal en sexagésimal : exemple :

3,67 h : $0{,}67 \times 60 = 40{,}2$ min : soit : 3 h 40 min et…

$0{,}2 \times 60 = 12$ s : donc : 3,67 h = 3 h 40 min 12 s

Pression

$\boxed{1 \text{ atm} = 1{,}013 \text{ bar} = 101325 \text{ Pa} = 1013 \text{ mbar} = \ldots}$

$\boxed{\ldots = 760 \text{ mmHg} = 10{,}33 \text{ mCE}}$

$\boxed{1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2}$ $\boxed{1 \text{ bar} = 1 \text{ daN/cm}^2}$

Souvent, on simplifie en écrivant que : $\boxed{1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}}$

Vitesse

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{m/s}} \arrow[r, bend left, "\times 3{,}6"] & \boxed{\text{km/h}} \arrow[l, bend left, "\div 3{,}6"] \end{tikzcd}$$

Fréquence de rotation

$$\begin{tikzcd} "x" & \boxed{\text{tr/s}} \arrow[r, bend left, "\times 60"] & \boxed{\text{tr/min}} \arrow[l, bend left, "\div 60"] & "y" \end{tikzcd}$$

Cela revient à faire le produit en croix suivant :

tr/s :	"x" tr	→	1 s
tr/min :	"y" tr	→	60 s (1 min)

Exemple : Conversion d'unités composées

On veut convertir 120 g/L en mg/cL

$\frac{1g}{1L} = \frac{1000\ mg}{100\ cL}$ donc $120 \times 10 = 1200\ mg/cL$

4. Proportionnalité

Définition

Un tableau de nombres relève d'une situation de proportionnalité si un même coefficient multiplicateur s'applique dans tout le tableau. On parle alors de coefficient de proportionnalité.

12	18	27	30	54
8	12	18	20	36

$Cm = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \frac{27}{18} = \frac{30}{20} = \frac{54}{36} = 1,5$. Alors il s'agit d'un tableau de proportionnalité

Produit en croix

Dans une situation de proportionnalité, la quatrième proportionnelle est le nombre « x » calculé à partir de 3 autres nombres déjà connus (a, b et c).

a	c
b	x

Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

On a : $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ avec a, b et c sont différents de zéro.

Et donc : $a \times x = b \times c$ (égalités des produits en croix)

Fin du chapitre

Pourcentages

https://www.acppav.org

1. Pourcentage d'une grandeur

La proportion, exprimée en pourcentage, d'une grandeur A par rapport à une grandeur B se retrouve en effectuant le calcul $\dfrac{A}{B} \times 100$.

Exemple(s)

- Quel pourcentage représentent 18 élèves par rapport à un total de 120 élèves ?
  Réponse : 15% car $\dfrac{18}{120} \times 100 = 15$.
- Quel pourcentage représentent 2,10 euros par rapport à une somme totale de 700 euros ?
  Réponse : $0,3\%$ car $\dfrac{2,1}{700} \times 100 = 0,3$.

Prendre $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\dfrac{x}{100}$.

Exemple(s)

- Quelle somme représente 5% de 640 euros ?
  Réponse : 32 euros car $\dfrac{5}{100} \times 640 = 32$

1. Pourcentage d'une grandeur

Exemple(s)

- Quelle somme représente $0,45\%$ de $15\,000$ euros ?
  Réponse : $67,5$ euros car $\dfrac{0,45}{100} \times 15\,000 = 67,5$.
- 384 élèves d'un lycée font de l'espagnol ce qui représente 32% du nombre total d'élèves dans le lycée. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?
  Réponse : Cela revient à chercher x tel que $\dfrac{32}{100} \times x = 384$. On en déduit que $x = \dfrac{384}{\frac{32}{100}} = \dfrac{384 \times 100}{32} = 1200$. Le lycée comporte $1\,200$ élèves.

Prendre $x\%$ de $y\%$ d'une grandeur revient à prendre directement $\dfrac{x \times y}{100}\%$ de cette grandeur.

Cela vient du fait que $\dfrac{x}{100} \times \dfrac{y}{100} \times 100 = \dfrac{x \times y}{100}$

Exemple(s)

- Quel pourcentage global des revenus est ponctionné si on prélève une taxe de 20% sur 80% des revenus ?
  Réponse : 16% car $\dfrac{20 \times 80}{100} = 16$.

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

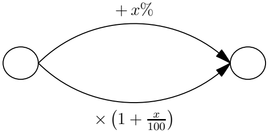
a) Principe général

- Si on augmente une grandeur A de $x\%$, on obtient $A + \frac{x}{100}A = \left(1 + \frac{x}{100}\right)A$.
- Si on diminue une grandeur A de $x\%$, on obtient $A - \frac{x}{100}A = \left(1 - \frac{x}{100}\right)A$.

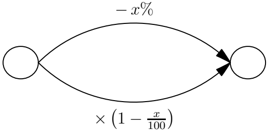
Propriété(s)

Représentation schématique :

- *Augmenter une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.*
  *$\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la hausse.*



- *Diminuer une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.*
  *$\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la baisse.*



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

1.
   - Augmenter une grandeur de 3% revient à la multiplier par $\left(1+\frac{3}{100}\right)=1,03$
   - Augmenter une grandeur de 12,5% revient à la multiplier par $\left(1+\frac{12,5}{100}\right)=1,125$
   - Augmenter une grandeur de 100% revient à la multiplier par $\left(1+\frac{100}{100}\right)=2$
2.
   - Diminuer une grandeur de 15% revient à la multiplier par $\left(1-\frac{15}{100}\right)=0,85$
   - Diminuer une grandeur de 7,5% revient à la multiplier par $\left(1-\frac{7,5}{100}\right)=0,925$
   - Diminuer une grandeur de 50% revient à la multiplier par $\left(1-\frac{50}{100}\right)=0,5$
3. Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 4%, son nouveau prix est de $500\times 1,04=520$ euros.

$$\begin{tikzcd} 500 \arrow[r, bend left, "+4\%"] \arrow[r, bend right, "\times\left(1+\frac{4}{100}\right)"'] & 520 \end{tikzcd}$$

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

4. Si une action valant 15 euros subit une baisse de 6%, sa nouvelle valeur est de $15 \times 0,94 = 14,1$ euros.

$$\begin{tikzcd} 15 \arrow[r, bend left, "-6\%"] \arrow[r, bend right, "\times\left(1-\frac{6}{100}\right)"'] & 14{,}1 \end{tikzcd}$$

5. Le prix d'un produit est de $159,6$ euros après avoir subi une hausse de 14%. Le prix du produit avant la hausse était x tel que $x \times 1,14 = 159,6$. On obtient $x = \frac{159,6}{1,14} = 140$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "+14\%"] \arrow[r, bend right, "\times\left(1+\frac{14}{100}\right)"'] & 159{,}6 \end{tikzcd}$$

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

b) Retrouver un pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur

Multiplier une grandeur par un coefficient t revient à lui appliquer une évolution en pourcentage (positive ou négative) de $(t-1) \times 100$.

Exemple(s)

1. Multiplier une grandeur par $1,15$ revient à lui appliquer une hausse de 15% car $(1,15-1) \times 100 = 15$.
2. Multiplier une grandeur par $1,04$ revient à lui appliquer une hausse de 4% car $(1,04-1) \times 100 = 4$.
3. Multiplier une grandeur par $0,9$ revient à lui appliquer une baisse de 10% car $(0,9-1) \times 100 = -10$.
4. Multiplier une grandeur par $0,72$ revient à lui appliquer une baisse de 28% car $(0,72-1) \times 100 = -28$.

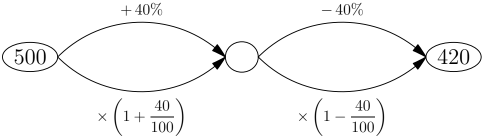
c) Application aux variations successives

Principe : Lors d'augmentations et/ou de baisses successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient mais les pourcentages ne s'ajoutent pas.

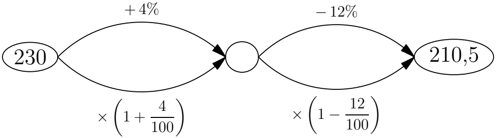
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

1. Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 40% suivie d'une baisse de 40%, son nouveau prix est de 420 euros car $500 \times 1,4 \times 0,6 = 420$.



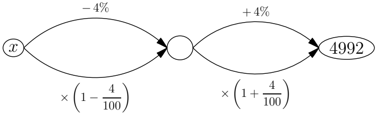
2. Si le prix d'un produit valant 230 euros subit une hausse de 4% suivie d'une baisse de 12%, son nouveau prix est de 210,5 euros car $230 \times 1,04 \times 0,88 \approx 210,5$.



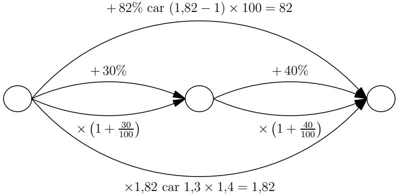
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

3. Le prix d'un produit est de 4992 euros après avoir subi une baisse de 4%, suivie d'une hausse de 4%. Le prix initial du produit était x tel que $x \times 0,96 \times 1,04 = 4992$. On obtient $x = \frac{4992}{0,96\times 1,04} = 5000$.



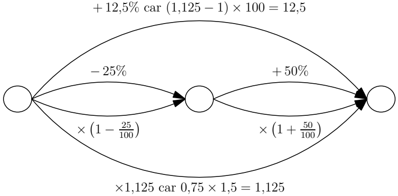
4. Faire subir à une grandeur une hausse de 30% suivie d'une autre hausse de 40% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de 82% car le coefficient multiplicateur global est de $1,3 \times 1,4 = 1,82$ et que $(1,82 - 1) \times 100 = 82$.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

5. Faire subir à une grandeur une baisse de 25% suivie d'une hausse de 50% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de $12,5\%$ car le coefficient multiplicateur global est de $0,75 \times 1,5 = 1,125$ et que $(1,125 - 1) \times 100 = 12,5$.

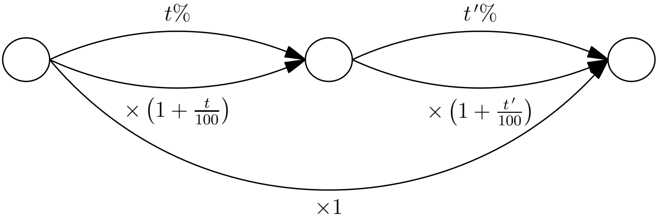


6. Un capital augmentant de $3,5\%$ par an pendant 10 ans a subi une hausse globale en pourcentage sur ces 10 ans d'environ 41% car le coefficient multiplicateur global est de $\underbrace{1,035 \times 1,035 \times \cdots \times 1,035}_{\text{10 fois}} = 1,035^{10} \approx 1,41$ et que $(1,41 - 1) \times 100 = 41$.

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

d) Taux d'évolution réciproque

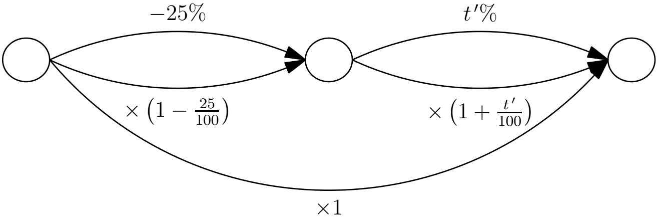
Si une grandeur subit une évolution de $t\%$, on appelle taux d'évolution réciproque de cette évolution, le taux t' tel que $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$, c'est à dire le taux d'évolution qui permet « d'annuler » l'évolution de $t\%$ en rendant le coefficient multiplicateur global égal à 1.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 25% revient à déterminer t' tel que $\left(1-\frac{25}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$:



Détermination de t' : $\left(1-\frac{25}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 0,75\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{0{,}75}$
$\Leftrightarrow 1+\frac{t'}{100}\approx 1,333 \Leftrightarrow \frac{t'}{100}\approx 0,333 \Leftrightarrow t'\approx 33,3$.
Autrement dit, il faut une hausse de $33,3\%$ pour « annuler » une baisse de 25%.

3. Variations d'une grandeur

Définition

Étant donné une grandeur passant de la valeur initiale A à la valeur finale B, on dit que :

- cette grandeur a subi une **variation absolue** égale à $B - A$;
- cette grandeur a subi une **variation relative** égale à $\dfrac{B-A}{A}$;

Propriété(s)

L'évolution en pourcentage *qu'a subi cette grandeur se retrouve en effectuant le calcul :*

$$\frac{B-A}{A} \times 100 = \frac{\textit{valeur finale} - \textit{valeur initiale}}{\textit{valeur initiale}} \times 100.$$

En effet :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "+x\%"] \arrow[r, bend right, "\times\left(1+\frac{x}{100}\right)"'] & B \end{tikzcd}$$

$$A \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = B \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = \frac{B}{A} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B}{A} - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B-A}{A} \Leftrightarrow x = \frac{B-A}{A} \times 100$$

3. Variations d'une grandeur

Exemple(s)

1. Lorsque le prix d'un produit passe de 64 à 72 euros :
   - la variation absolue du prix est égale à $72 - 64 = 8$ euros ;
   - la variation relative du prix est égale à $\dfrac{72-64}{64} = 0,125$;
   - l'évolution en pourcentage du prix est de $+12,5\%$ car $\dfrac{72-64}{64} \times 100 = 12,5$.
2. La valeur d'une action passant de $13,4$ à $11,7$ euros a subi une baisse en pourcentage d'environ $12,7\%$ car $\dfrac{11,7-13,4}{13,4} \times 100 \approx -12,7$.

Fin du chapitre

Calcul Littéral et Equations

Walid Haddad

https://www.acppav.org

1. Calcul littéral

Définition

Une expression littérale est une expression contenant des lettres, des nombres, des parenthèses, des opérations ...

Exemple : La formule du périmètre d'un cercle est $2 \times \pi \times r$ Dans cette expression r est le rayon du cercle et π est un nombre qui ne change pas est qui vaut environ $3,14$.

Une expression littérale contient des produits et des sommes littéraux :

Exemple : $\underbrace{(\overbrace{\underbrace{2 \times x}_{produit} + x^2}^{somme}) \times 5 \times x}_{produit}$

a) Notions de base

- $x \times x = x^2$; $x \times x \times x = x^3$; $\overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n\ fois} = x^n$
- On peut supprimer les parenthèses en faisant attention au signe qui est avant.
  Si signe "+" : tout élément à l'intérieur garde son signe
  $2 \times x + (-2 + x - x^2) = 2 \times x - 2 + x + x^2$
  Si signe "-" tout élément à l'intérieur change de signe
  $2 \times x - (-2 + x - x^2) = 2 \times x + 2 - x - x^2$

b) Simplifier et réduire

- Pour simplifier un produit littéral, on peut supprimer le symbole « $\times$ » devant une lettre ou une parenthèse :
  $2 \times \pi \times r = 2\pi r \qquad 5 \times (2 + x) = 5(2 + x)$
- Pour simplifier un produit littéral, on peut calculer les éléments de même genre ensemble en les multipliant
  $2 \times x \times y \times 4 = 8xy\,; \quad 2 \times x \times y \times x = 2yx^2$
- Pour réduire une somme littérale, on peut calculer les éléments de même genre ensemble en les additionnant
  $2 \times x + 4 \times x + 2 \times y + 1 = 2x + 4x + 2y + 1 = 6x + 2y + 1$

c) Remplacer une lettre par une valeur dans une expression

- Calculer la valeur d'une expression littérale, c'est attribuer un nombre à chaque lettre de l'expression afin d'effectuer le calcul.
- Une même lettre désigne toujours un même nombre dans une expression littérale donnée.

Calculons $\quad A = 2 + 3t$ pour $t = 2 \quad$ et $\quad B = 2x^2 - 3x + 1$ pour $x = 3$.
$A = 2 + 3t = 2 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8$
$B = 2x^2 - 3x + 1 = 2 \times (3)^2 - 3 \times 3 + 1 = 2 \times 9 - 9 + 1 = 18 - 9 + 1 = 10$

d) Développement d'un produit littéral

Distributivité

- $k \times (a+b) = ka + kb$
- $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemple(s)

- $-2(x-3) = (-2) \times x + (-2) \times (-3) = -2x + 6$
- $(-x-2) \times (4+y) = (-x) \times 4 + (-x)y + (-2) \times 4 + (-2)y = -4x - xy - 8 - 2y$
- $(-2-x)^2 = (-2)^2 - 2 \times (-2) \times x + x^2 = 4 - 4x + x^2$
- $(-2-x)(-2+x) = (-2)^2 - x^2 = 4 - x^2$

e) Factorisation d'une somme littérale

Facteur commun

$ka + kb = k(a+b)$

Identités remarquables

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple(s)

- $-2(x-3) + y(x-3) = (x-3)(y-2)$
- $(-2-x)^2 - 9 = (-2-x)^2 - 3^2 = ((-2-x)-3)((-2-x)+3) = (-5-x)(1-x)$
- $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 = (2x-3)^2$

2. Les équations de 1^{er} degré

Définition

Une équation est une expression littérale définie par une égalité entre deux quantités.

Exemple(s)

Les expressions suivantes sont des équations.

$2x-3=4 \qquad x^2-2x+5=3x-2 \qquad x-2y=3-y+5x$

Principes de base

- $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad ou \quad b = 0$
- $a \times b = 1 \Leftrightarrow a \;\; est \;\; l'inverse \;\; de \;\; b$
- $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$

Exemple(s)

$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \frac{2x}{x-5} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Manipulations de base

On peut effectuer des opérations sur les équations sans les déséquilibrer :

- On peut multiplier les quantités de droite et gauche par une même quantité
  Exemple : $x - 1 = y - 2 \Leftrightarrow (x-1) \times 2x = (y-2) \times 2x$
- On peut rajouter ou enlever la même quantité à droite et à gauche.
  Exemple : $2x - 1 = 3y + 2 \Leftrightarrow 2x - 1 + 5x = 3y + 2 + 5x$
  $x + 3 = 3y + 3 \Leftrightarrow x + 3 - y = 3y + 3 - y$
- On peut déplacer des quantités de droite à gauche ou inversement en changeant le signe.
  Exemple : $x + 3 = 3y + 3 \Leftrightarrow x + 3 - 3y = 3y + 3 - 3y \Leftrightarrow x + 3 - 3y = 3$

Méthode de résolution

Résoudre une équation revient à chercher les valeurs de l'inconnu "x" qui vérifie l'équilibre.
Exemple : On a $-2x - 1 = x + 2$ Pour x=-1 ,on a :$-2 \times (-1) - 1 = 1$ et $x + 2 = (-1) + 2 = 1$
Alors on dit que -1 vérifie l'équilibre et donc une solution de $-2x - 1 = x + 2$.
Comment Faire pour trouver "x"

Résolution : Équations de la forme $ax + b = mx + p$

Si $a \neq 0$, la résolution de ces équations est basée sur les Trois opérations suivantes :

- Opération n°1 : $ax+b = mx + p \Leftrightarrow ax-mx = p-b$ (transposition d'un élément d'un membre à l'autre ; on change le signe de l'élément qu'on transpose)
- Opération n°2 : On réduit (On développe avant si nécessaire).
- Opération n°3 : On obtient $a + mx = p - b \Leftrightarrow x = \dfrac{p-b}{a+m}$ (division par le coefficient devant x)

Exemple(s)

1. Résolution de $2x + 3 = 0$: $2x+3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}$.$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
2. Résolution de $3x - 4 = 0$: $3x-4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.$S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$
3. Résolution de $7x = 0$: $7x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{7} \Leftrightarrow x = 0$.$S = \{0\}$

Fin du chapitre

Statistiques

Walid HADDAD

https://www.acppav.org

1. Vocabulaire

- **Population** : c'est l'ensemble étudié.
- **Individu** : c'est un élément de la population.
- **Effectif total** : c'est le nombre total d'individus.
- **Caractère** : c'est la propriété étudiée.
  Il y a deux sortes de caractères :
  - les caractères quantitatifs que l'on peut mesurer avec des nombres.
    On distingue les caractères quantitatifs **discrets** qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (notes à un devoir...) et les caractères quantitatifs **continus** dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute...).
  - les caractères qualitatifs (profession, marque de voiture ...).

Exemple(s)

On considère l'exemple suivant (qui servira pour les prochains paragraphes) : les 17 élèves d'une classe sont séparés en deux groupes.

- Les notes obtenues à un devoir par le **groupe A** sont : 4 ; 4 ; 9 ; 9 ; 9 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17
- Les notes obtenues à un devoir par le **groupe B** sont : 6 ; 6 ; 8 ; 8 ; 10 ; 10 ; 12 ; 12

- La population étudiée est l'ensemble des 17 élèves
- Le caractère étudié est la note obtenue
- L'effectif total est égal à 17

2. Séries statistiques

a) Classement des données

Définition

On appelle **série statistique** la donnée simultanée des valeurs du caractère étudié (notées x_i), rangées dans l'ordre croissant, et des effectifs (notés n_i) de ces valeurs.

Exemple(s)

Pour le groupe A, le regroupement des notes en série statistique est :

valeur	4	9	15	17
effectif	2	3	2	2

Pour le groupe B, le regroupement des notes en série statistique est :

valeur	6	8	10	12
effectif	2	2	2	2

Définition

L'effectif cumulé croissant d'une valeur x est la somme des effectifs des valeurs y tels que $y \leqslant x$.
L'effectif cumulé décroissant d'une valeur x est la somme des effectifs des valeurs y tels que $y > x$.

Exemple(s)

Pour le groupe A de l'exemple, le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants est :

valeur	4	9	15	17
effectif cumulé croissant	2	5	7	9
effectif cumulé décroissant	7	4	2	0

2. Séries statistiques

Une série statistique peut aussi être définie par les fréquences, plutôt que par les effectifs.

Définition

Dans une population d'effectif total N, la **fréquence** de la valeur x_i d'effectif n_i est $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.

Exemple(s)

Pour le groupe B de l'exemple, le tableau des fréquences est :

valeur	6	8	10	12
fréquence en pourcentage	25%	25%	25%	25%

b) Représentation graphique

Pour les caractères quantitatifs discrets, on peut utiliser le **diagramme en bâton** basé sur le principe suivant :
Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique on trace un trait vertical dont la hauteur correspond à l'effectif (dans l'unité choisie).

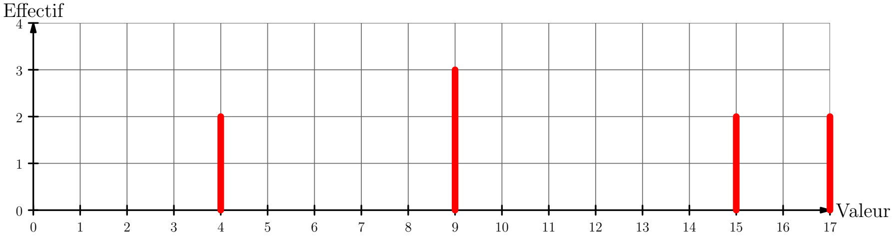
2. Séries statistiques

Exemple(s)

Pour le groupe A de l'exemple dont la série statistique était

valeur	4	9	15	17
effectif	2	3	2	2

le diagramme en bâtons donne :



2. Séries statistiques

Pour les caractères quantitatifs discrets, on peut aussi utiliser le **polygone des effectifs** qui se trace en reliant les points successifs de coordonnées (valeur,effectif) pour obtenir une ligne brisée.

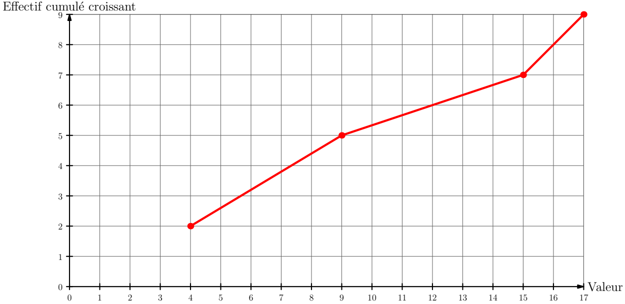
En utilisant les effectifs cumulés croissants ou décroissants, on obtient le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants.

Exemple(s)

Pour le groupe A de l'exemple dont le tableau des effectifs cumulés croissants était

valeur	4	9	15	17
effectif cumulé croissant	2	5	7	9

le polygone des effectifs cumulés croissants donne :



3. Moyenne et écart-type d'une série statistique

Définition

On appelle moyenne de la série

valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
effectif	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

, le réel

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N}$$

(N représente l'effectif total et k est le nombre de valeurs prises par le caractère)

Exemple(s)

- Pour la série du groupe A

valeur	4	9	15	17
effectif	2	3	2	2

, la moyenne est

$$\overline{x_A} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 9 + 2 \times 15 + 2 \times 17}{9} = 11$$

- Pour la série du groupe B

valeur	6	8	10	12
effectif	2	2	2	2

, la moyenne est

$$\overline{x_B} = \frac{2 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 10 + 2 \times 12}{8} = 9$$

3. Moyenne et écart-type d'une série statistique

Propriété(s)

- *En utilisant les fréquences, on a :* $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k$.
- *Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre* b*, on augmente la moyenne de cette série de* b.
- *Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre* a*, la moyenne de cette série est aussi multipliée ou divisée par* a.
- *Si une population d'effectif* N *est composée d'une partie d'effectif* N_A *et de moyenne* $\overline{x_A}$ *et d'une autre partie d'effectif* N_B *et de moyenne* $\overline{x_B}$*, alors la moyenne de la population totale est telle que :* $\overline{x} = \dfrac{N_A\overline{x_A} + N_B\overline{x_B}}{N}$

Exemple(s)

Pour notre exemple :
la moyenne du groupe A, composée de $N_A = 9$ élèves, était $\overline{x_A} = 11$ et la moyenne du groupe B, composée de $N_B = 8$ élèves, était $\overline{x_B} = 9$.
On peut en déduire que la moyenne globale de la classe est
$\overline{x} = \dfrac{N_A\overline{x_A} + N_B\overline{x_B}}{N} = \dfrac{9 \times 11 + 8 \times 9}{17} \approx 10,06$

3. Moyenne et écart-type d'une série statistique

Définition

- **La variance** V d'une série statistique d'effectif total N est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $V = \dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2}{N}$.
- **L'écart-type** σ d'une série statistique est la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$.
  Il sert à mesurer la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne.

Remarque(s)

Pour des petites séries, on utilise ce genre de tableau pour effectuer les calculs :

valeur	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
écart à la moyenne				
carré de l'écart				
effectif				

Le calcul de la variance se fait alors en calculant la moyenne des carrés de l'écart (avant-dernière ligne) en tenant compte des effectifs que l'on rappelle à la dernière ligne.

3. Moyenne et écart-type d'une série statistique

Exemple(s)

Dans le groupe A, la moyenne était de 11. Donc,

valeur	4	9	15	17
écart à la moyenne	-7	-2	4	6
carré de l'écart	49	4	16	36
effectif	2	3	2	2

Variance $V_A = \dfrac{2 \times 49 + 3 \times 4 + 2 \times 16 + 2 \times 36}{9} \approx 23,8$

Écart-type $\sigma_A \approx \sqrt{23,8} \approx 4,9$

Dans le groupe B, la moyenne était de 9. Donc,

valeur	6	8	10	12
écart à la moyenne	-3	-1	1	3
carré de l'écart	9	1	1	9
effectif	2	2	2	2

Variance $V_B = \dfrac{2 \times 9 + 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 9}{8} = 5$

Écart-type $\sigma_B = \sqrt{5} \approx 2,2$

Propriété(s)

- *L'écart-type est de même unité que les valeurs de la série statistique.*
- *Si on ajoute à toutes les valeurs d'une série statistique le même nombre b, l'écart-type reste inchangé.*
- *Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre strictement positif a, l'écart-type de cette série est aussi multiplié ou divisé par a.*
- *Si les valeurs d'une série statistique sont multipliées ou divisées par un même nombre strictement négatif a, l'écart-type de cette série est multiplié ou divisé par $(-a)$*

4. Médiane et écart interquartile d'une série statistique

Principe

- La médiane M d'une série statistique partage la population en deux parties de telle façon qu'au moins 50% des valeurs du caractère soient inférieurs ou égaux à M et qu'au moins 50% des valeurs du caractère soient supérieurs ou égaux à M.
- Le principe théorique des quartiles est de partager la population en quatre parties de même effectif.
- Il existe plusieurs manières de déterminer pratiquement la médiane et les quartiles. Les calculatrices, les tableurs et les logiciels de statistique n'utilisent pas tous la même méthode. Une seule méthode pratique sera présentée ici.

Détermination pratique

En écrivant les valeurs du caractère par ordre croissant de telle façon que chaque valeur apparaisse un nombre de fois égal à son effectif :

- **Médiane :**
  - si l'effectif total est impair, la médiane M est la valeur du caractère située au milieu de la liste ;
  - si l'effectif total est pair, la médiane M est la demi-somme des deux valeurs du caractère situées au milieu de la liste.
- **Quartiles :** en partageant la liste en deux sous-séries de même effectif (si l'effectif total est impair, on te tient pas compte de la médiane)
  - le premier quartile Q_1 est la médiane de la sous-série inférieure ;
  - le troisième quartile Q_3 est la médiane de la sous-série supérieure ;
  - l'écart interquartile est défini par $Q_3 - Q_1$ et sert à mesurer la dispersion des valeurs.

4. Médiane et écart interquartile d'une série statistique

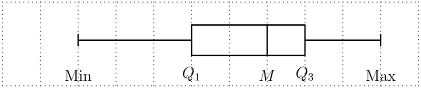
Exemple(s)

- Groupe A :
  - Détermination de la médiane : $4 \ ; \ 4 \ ; \ 9 \ ; \ 9 \ ; \ \overline{9} \ ; \ 15 \ ; \ 15 \ ; \ 17 \ ; \ 17$
    La médiane est $M = 9$ (valeur située au milieu, car l'effectif total est impair)
  - Détermination de Q_1 et Q_3 : on partage la liste en deux sous-séries de même effectif (on ne tient pas compte de la médiane car l'effectif total est impair) :
    $\underbrace{4 \ ; \ \underline{4} \ ; \ \underline{9} \ ; \ 9}\ ; \ 9 \ ; \ \underbrace{15 \ ; \ \underline{15} \ ; \ \underline{17} \ ; \ 17}$
    Les effectifs des deux sous-séries étant pairs, Q_1 est la demi-somme de la sous-série inférieure et Q_3 est la demi-somme de la sous-série supérieure :
    $Q_1 = \frac{4+9}{2} = 6,5$; $Q_3 = \frac{15+17}{2} = 16$
    L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 16 - 6,5 = 9,5$
- Groupe B :
  - Détermination de la médiane : $6 \ ; \ 6 \ ; \ 8 \ ; \ \overline{8} \ ; \ \overline{10} \ ; \ 10 \ ; \ 12 \ ; \ 12$
    La médiane est $M = \frac{8+10}{2} = 9$ (demi-somme des deux valeurs situées au milieu, car l'effectif total est pair)
  - Détermination de Q_1 et Q_3 : on partage la liste en deux sous-séries de même effectif :
    $\underbrace{6 \ ; \ \underline{6} \ ; \ \underline{8} \ ; \ 8}\ ; \ \underbrace{10 \ ; \ \underline{10} \ ; \ \underline{12} \ ; \ 12}$
    Les effectifs des deux sous-séries étant pairs, Q_1 est la demi-somme de la sous-série inférieure et Q_3 est la demi-somme de la sous-série supérieure :
    $Q_1 = \frac{6+8}{2} = 7$; $Q_3 = \frac{10+12}{2} = 11$
    L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 11 - 7 = 4$

4. Médiane et écart interquartile d'une série statistique

Diagramme en boîtes

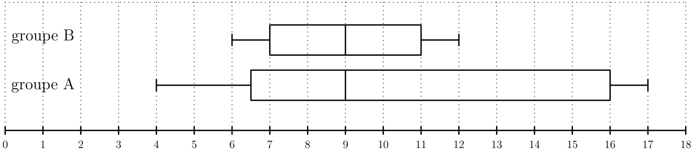
Le diagramme en boîtes d'une série statistique se construit de la façon suivante :



- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Min et Q_1 ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Q_1 et M ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre M et Q_3 ;
- 25% des valeurs du caractère sont comprises entre Q_3 et Max.

Exemple(s)

- Pour le groupe A, on a $Min = 4$; $Q_1 = 6,5$; $M = 9$; $Q_3 = 16$; $Max = 17$
- Pour le groupe B, on a $Min = 6$; $Q_1 = 7$; $M = 9$; $Q_3 = 11$; $Max = 12$



5. Exemple d'étude d'un caractère quantitatif continu

Exemple(s)

On a posé la question suivante à 34 élèves : « Combien de temps avez-vous consulté votre téléphone portable hier ? ». Voici les résultats obtenus :

temps en minutes	$[0, 30[$	$[30, 60[$	$[60, 120[$	$[120, 180[$
nombre d'élèves	12	8	10	4

Remarque : les intervalles $[0, 30[$, $[30, 60[$ ... sont appelés **classes** du caractère.

Histogramme

Pour la représentation graphique d'un caractère continu, on utilise généralement un **histogramme** dont le principe est le suivant : dans un repère orthogonal on porte en abscisse les valeurs des bornes, puis pour chaque classe on trace un rectangle dont **l'aire est proportionnelle à l'effectif**.

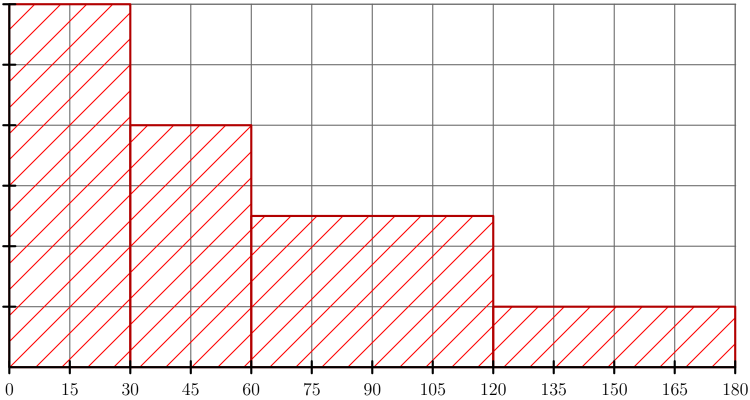
Pour déterminer la hauteur de chaque rectangle en respectant les unités données, on peut utiliser un tableau. Pour l'exemple, cela donne : (unités : en abscisse 1 cm représente 15 min et 1 cm^2 représente 1 élève)

temps en minutes	$[0, 30[$	$[30, 60[$	$[60, 120[$	$[120, 180[$
aire du rectangle en cm^2	12	8	10	4
largeur du rectangle en cm	2	2	4	4
hauteur du rectangle en cm	6	4	2,5	1

5. Exemple d'étude d'un caractère quantitatif continu

Histogramme

Il n'y a plus alors qu'à tracer :



5. Exemple d'étude d'un caractère quantitatif continu

Moyenne et écart-type pour des valeurs regroupées en classes

Pour calculer la moyenne d'une série statistique d'un caractère quantitatif continu, on prend comme valeur du caractère **le milieu de chaque classe**.

Pour l'exemple,

- Calcul de la moyenne :

valeur (milieu de chaque intervalle)	15	45	90	150
effectif	12	8	10	4

Moyenne $\overline{x} = \dfrac{12 \times 15 + 8 \times 45 + 10 \times 90 + 4 \times 150}{34} = 60$

- Calcul de la variance et de l'écart-type :

valeur (milieu de chaque intervalle)	15	45	90	150
écart à la moyenne	-45	-15	30	90
carré de l'écart	2025	225	900	8100
effectif	12	8	10	4

Variance $V = \dfrac{12 \times 2025 + 8 \times 225 + 10 \times 900 + 4 \times 8100}{34} \approx 1985,3$

Écart-type $\sigma \approx \sqrt{1985,3} \approx 44,6$

Fin du chapitre

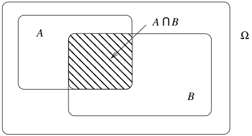
Probabilités

Walid HADDAD

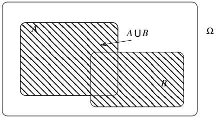
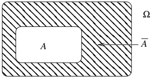
https://www.acppav.org

1. Langage des événements

Pour illustrer le vocabulaire, on utilise l'exemple suivant « tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes ».

Vocabulaire	Avec l'exemple
On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.	Ω = ensemble formé des 32 cartes
On appelle **événement**, toute partie de l'univers.	$A =$ « obtenir l'as de pique » =ensemble formé de l'as de pique $B =$ « obtenir un as » =ensemble formé des 4 as
On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.	« obtenir l'as de pique » est un événement élémentaire, mais pas « obtenir un as ».
L'événement $A \cap B$ (« A ET B ») est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B. 	Si $A =$ « obtenir un as » et $B =$ « obtenir un carreau » : $A \cap B =$ « A ET B »= « obtenir un as et un carreau »

1. Langage des événements

Vocabulaire	Avec l'exemple
L'événement $A \cup B$ (« A OU B ») est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B. 	Si A = « obtenir un as » et B = « obtenir un carreau » : $A \cup B$ = « A OU B »= « obtenir un as ou un carreau »
Deux événements sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si leur intersection est vide.	« obtenir une figure » et « obtenir un 7 » sont incompatibles, mais « obtenir une figure » et « obtenir un cœur » sont compatibles.
On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A. 	Si A = « obtenir une carte rouge » : $\overline{A}$ = « obtenir une carte noire ».
• L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**. • L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.	« obtenir un 2 » est un événement impossible. « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

2. Probabilités sur un univers fini

a) Loi de probabilité

Définition

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini, c'est associer à chaque événement élémentaire un nombre compris entre 0 et 1, appelé probabilité de l'événement élémentaire correspondant, de telle façon que :

- la somme des probabilités de tous les événements élémentaires soit égale à 1 ;
- la probabilité d'un événement A, noté $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Modélisation d'une expérience aléatoire

- Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité donnant les probabilités des événements élémentaires.
- Le choix d'une modélisation doit suivre la « loi des grands nombres » qui dit que si on répète un grand nombre de fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire, la fréquence d'observation d'un événement doit « tendre » vers la probabilité de cet événement établi par le modèle choisi.

2. Probabilités sur un univers fini

c) Exemples de choix d'une modélisation

Exemples de choix d'une modélisation

- **Exemple 1 :** lancer d'une pièce équilibrée.

  On choisit la loi de probabilité :

Événement élémentaire	pile	face
probabilité	$0,5$	$0,5$

- **Exemple 2 :** lancer d'une punaise. On peut difficilement utiliser un modèle théorique : on se base alors sur des expériences consistant à lancer un grand nombre de fois une punaise et on prend comme probabilité, la fréquence observée lors de ces expériences. Si on constate que la punaise tombe sur la tête dans 32% des cas, on peut prendre comme loi de probabilité :

Événement élémentaire	tête	pointe
probabilité	$0,32$	$0,68$

- **Exemple 3 :** lancer d'un dé truqué de façon à ce que la face « 6 » ait 3 fois plus de chance de sortir que les autres faces. Le modèle doit donc respecter les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p(«1») = p(«2») = p(«3») = p(«4») = p(«5») \\ p(«6») = 3p(«1») \\ p(«1») + p(«2») + p(«3») + p(«4») + p(«5») + p(«6») = 1 \end{cases}$$

  On déduit de la dernière ligne qu'il faut $5p(«1») + 3p(«1») = 1$. La loi de probabilité correspondante est alors :

Événement élémentaire	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»
probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

3. Propriétés des probabilités

Propriété(s)

Pour toute expérience aléatoire telle que l'univers Ω soit fini et quelque soit la loi de probabilité choisie :

- $p(\emptyset) = 0$ *(événement impossible)*
- $p(\Omega) = 1$ *(événement certain)*
- *Pour tout événement A,* $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- *Si un événement A est inclus dans un événement B,* $p(A) \leqslant p(B)$
- *Pour tout événement A,* $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ *(probabilité de l'événement contraire)*
- *Si deux événements A et B sont incompatibles,* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- *Si A et B ne sont pas incompatibles,* $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Cas particulier de la loi équirépartie

- Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (lancer d'un dé non truqué, tirage d'une carte...), on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité et la loi de probabilité est dite alors loi équirépartie.
- Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers fini, pour tout événement A on a :
  $$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3. Propriétés des probabilités

Exemple(s)

On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note :

- A l'événement « la carte tirée est un as »
- B l'événement « la carte tirée est un carreau »
- C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) »

On a alors :

- $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ (4 as) ; $p(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ (8 carreaux) ; $p(C) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$ (12 figures)
- $p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$ (as et carreau)
- $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right) = \dfrac{4}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$ (as ou carreau : il ne faut pas compter l'as de carreau deux fois)
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p\left(A\right) = \dfrac{7}{8}$ (ne pas obtenir un as)
- $p\left(A \cup C\right) = p\left(A\right) + p\left(C\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}$ (as ou figure : événements incompatibles)

4. Exemples de référence : tirages successifs

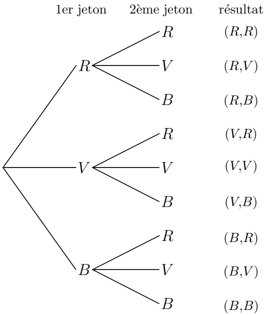
• **Exemple 1 :** tirage successif avec remise en s'aidant d'un arbre

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boite avant de tirer un deuxième jeton.

Le nombre de résultats possibles est égal à 9 et on a :

- $p\,(\text{« les deux jetons tirés sont rouges »}) = \dfrac{1}{9}$ (un cas favorable)
- $p\,(\text{« au moins un des deux jetons tirés est rouge »}) = \dfrac{5}{9}$ (5 cas favorables)



4. Exemples de référence : tirages successifs

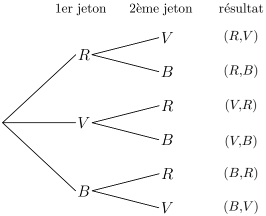
- **Exemple 2 :** tirage successif sans remise en s'aidant d'un arbre

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton puis un deuxième sans remettre le premier dans la boite.

Le nombre de résultats possibles est égal à 6 et on a :

- p (« les deux jetons tirés sont rouges ») $= 0$ (aucun cas favorable)
- p (« au moins un des deux jetons tirés est rouge ») $= \frac{4}{6}$ (4 cas favorables)



4. Exemples de référence : tirages successifs

• **Exemple 3 :** tirage successif avec remise sans arbre

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, que l'on remet dans le paquet avant de tirer une deuxième carte. On raisonne : *choix pour la 1^re^ carte ; choix pour la 2^e^ carte*

- Nombre de résultats possibles $= \overbrace{32}^{1^{\text{re}}\text{ carte}} \times \overbrace{32}^{2^{\text{e}}\text{ carte}} = 1024$

- $p\,(\text{« on obtient 2 as »}) = \dfrac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{1024} = \dfrac{1}{64}$

- $p\,(\text{« on obtient un as et un seul »}) =$

$$\frac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{28}^{2^{\text{e}}\text{ carte : pas as}} + \overbrace{28}^{1^{\text{re}}\text{ carte : pas as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{1024} = \frac{224}{1024} = \frac{7}{32}$$

4. Exemples de référence : tirages successifs

- **Exemple 4 :** tirage successif sans remise sans arbre

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis une deuxième sans remettre la première dans le paquet. On raisonne : *choix pour la 1re carte ; choix pour la 2e carte*

- Nombre de résultats possibles $= \overbrace{32}^{1^{\text{re}}\text{ carte}} \times \overbrace{31}^{2^{\text{e}}\text{ carte}} = 992$

- $p\,(\text{« on obtient 2 as »}) = \dfrac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{3}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{992} = \dfrac{3}{248}$

- $p\,(\text{« on obtient un as et un seul »}) =$

$$\frac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{28}^{2^{\text{e}}\text{ carte : pas as}} + \overbrace{28}^{1^{\text{re}}\text{ carte : pas as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{992} = \frac{224}{992} = \frac{7}{31}$$

Fin du chapitre